1 古典几何中的重要定理

例 1.1. 凸四边形$ABCD$的一组对边AB与CD所在直线交于点M。过M作直线分别交AD, BC于点H, L，交AC, BD于H', L'。求证：$\dfrac{1}{MH}+\dfrac{1}{ML}=\dfrac{1}{MH'}+\dfrac{1}{ML'}$ ①。

分析：这是一道直线形的题目，H, H', L, L'四点全在同一直线上，这提示我们把$\angle AMH$设为参数来表示①式中出现的四条线段长。

证. 设$\angle AMH=\alpha$，$\angle DMH=\beta$，由张角定理，

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{MH}=\frac{\sin\beta}{MA}+\frac{\sin\alpha}{MD},\qquad \frac{\sin(\alpha+\beta)}{ML}=\frac{\sin\beta}{MB}+\frac{\sin\alpha}{MC},$$
$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{MH'}=\frac{\sin\beta}{MA}+\frac{\sin\alpha}{MC},\qquad \frac{\sin(\alpha+\beta)}{ML'}=\frac{\sin\beta}{MB}+\frac{\sin\alpha}{MD},$$

所以$\sin(\alpha+\beta)(\dfrac{1}{MH}+\dfrac{1}{ML})=\dfrac{\sin\beta}{MA}+\dfrac{\sin\beta}{MB}+\dfrac{\sin\alpha}{MC}+\dfrac{\sin\alpha}{MD}=\sin(\alpha+\beta)(\dfrac{1}{MH'}+\dfrac{1}{ML'})$，①式得证。 □

例 1.2. 如图，已知A, B, C, D, P在圆ω上，E, F在线段AB上，满足$AE=4$，$EF=2$， $FB=1$，$CD=8$，求$AD\cdot BC$的值。

解.

$$\frac{AP\cdot AD}{BP\cdot BD}=\frac{AE}{EB}=\frac{4}{3},\quad \frac{BP\cdot BC}{AP\cdot AC}=\frac{BF}{FA}=\frac{1}{6},$$

所以$\dfrac{AD\cdot BC}{AC\cdot BD}=\dfrac{2}{9}$。由托勒密定理，$AB\cdot CD=AC\cdot BD-AD\cdot BC=AD\cdot BC(\dfrac{9}{2}-1)=56$。 □

例 1.3. 在凸四边形$ABCD$中，对角线AC, BD相交于E，直线AB, CD相交于F。求证：$\dfrac{[ADE]}{[BCE]}=\dfrac{[ADF]}{[BCF]}$。

证. 法一：先给一个面积法的证明。由共角定理和共边定理，我们有

$$\frac{[ADE]}{[BCE]}=\frac{AE}{CE}\cdot\frac{DE}{BE}=\frac{[ABD]}{[CBD]}\cdot\frac{[DAC]}{[BAC]}=\frac{[ABD]}{[ABC]}\cdot\frac{[ACD]}{[BCD]}=\frac{DF}{CF}\cdot\frac{AF}{BF}=\frac{[ADF]}{[BCF]},$$

法二：设直线EF交BC于K，交AD于L。考察直线BKC截$\triangle AEF$，和交于点D的三条直线AL, EB, FC，由梅涅劳斯定理和塞瓦定理，有

$$\frac{[BCF]}{[BCE]}=\frac{FK}{KE}=\frac{FB}{BA}\cdot\frac{AB}{CE}=\frac{FL}{LE}=\frac{[ADF]}{[ADE]},\qquad 所以\frac{[ADE]}{[BCE]}=\frac{[ADF]}{[BCF]},$$

□

例 1.4 (1999，高联)**.** 在四边形$ABCD$中，对角线AC平分$\angle BAD$，在CD上取一点E，BE与AC相交于F，延长DF交BC于点G。求证：$\angle GAC=\angle EAC$。

分析：我们给一个欧几里得式的证明和一个三角法的证明。注意到图形中AC是$\angle BAD$的平分线，这提示我们沿AC作轴对称构造辅助点和辅助线。

证. 法一：设B, G关于AC的对称点分别是B', G'，BD交AC于点K，则C, G', B'三点共线。由$\angle BAC=\angle DAC$知 A, B', D三点共线。我们证明A, G', E三点共线。因为

$$\frac{CE}{ED}\cdot\frac{DA}{AB'}\cdot\frac{B'G'}{G'C}=\frac{CE}{ED}\cdot\frac{DA}{AB}\cdot\frac{BG}{GC},\qquad ①$$

由角平分线定理，$\dfrac{DA}{AB}=\dfrac{DK}{KB}$。所以在$\triangle BCD$中，由塞瓦定理，①式右边$=\dfrac{CE}{ED}\cdot\dfrac{DK}{KB}\cdot\dfrac{BG}{GC}=1$。所以①式左边=1，在$\triangle CDB'$中由梅涅劳斯定理知$A,G',E$三点共线。于是$\angle GAC=\angle G'AC=\angle EAC$。

法二（三角法）：由$\triangle ABD$中的角平分线定理和$\triangle BCD$中的塞瓦定理，有

$$\frac{\sin\angle BAG}{\sin\angle CAG}=\frac{BG}{GC}\cdot\frac{AC}{AB}=\frac{BK}{KD}\cdot\frac{DE}{EC}\cdot\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{AD}\cdot\frac{AD\sin\angle DAE}{AC\sin\angle CAE}\cdot\frac{AC}{AB}=\frac{\sin\angle DAE}{\sin\angle CAE},$$

又因为$\angle BAG+\angle CAG=\angle BAC=\angle DAC=\angle DAE+\angle CAE<\pi$，所以$\angle BAG=\angle DAE$，$\angle GAC=\angle EAC$。 □

例 1.5. 设E,F分别为四边形$ABCD$的边BC,CD上的点，BF与DE交于点P。若$\angle BAE=\angle FAD$，求证：$\angle BAP=\angle CAD$ ①。

分析：本题中若AC平分$\angle BAD$，设BF交AC于P'，DP'交BC于E'，则由上一道题，$\angle E'AC=\angle FAC$，$\angle BAE'=\angle DAF$，所以E,E'重合，P,P'重合，①式得证。所以本题是上一道题的推广。我们在$\triangle BCF$中使用梅涅劳斯定理，并把边的比例转化为A点处张角的正弦的比例，得到下述方程②，再使用三角法证明①式。事实上，也可以在$\triangle CDE$，$\triangle BPE$，$\triangle DPF$中使用梅涅劳斯定理列方程。

证. 在$\triangle BCF$中，由梅涅劳斯定理，

$$1=\frac{CD}{DF}\cdot\frac{FP}{PB}\cdot\frac{BE}{EC}=\frac{AC\sin\angle CAD}{AF\sin\angle FAD}\cdot\frac{AF\sin\angle FAP}{AB\sin\angle BAP}\cdot\frac{AB\sin\angle BAE}{AC\sin\angle CAE}=\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle BAP}\cdot\frac{\sin\angle FAP}{\sin\angle CAE},$$

所以$\dfrac{\sin\angle CAD}{\sin\angle CAE}=\dfrac{\sin\angle BAP}{\sin\angle FAP}$ ①，又因为$\angle CAD+\angle CAE=\angle DAE=\angle BAF=\angle BAP+\angle FAP<\pi$，所以$\angle CAD=\angle BAP$，$\angle CAE=\angle FAP$。 □

例 1.6. 凸五边形$ABCDE$满足$\angle BAC=\angle CAD=\angle DAE$，$\angle ABC=\angle ACD=\angle ADE$，$P$是$BD$和$CE$的交点。求证：$AP$平分线段$CD$。

证. 设AC,BD交于点J，AD,CE交于点K，则$\triangle ABC\backsim\triangle ACD\backsim\triangle ADE$，。$\dfrac{AJ}{JC}=\dfrac{[BAD]}{[BCD]}=\dfrac{[CAE]}{[CDE]}=\dfrac{AK}{KD}$。设$AP,CD$交于点$M$，则由塞瓦定理，$\dfrac{CM}{DM}=\dfrac{CJ}{JA}\cdot\dfrac{AK}{KD}=1$，所以$AP$平分线段$CD$。 □

例 1.7 (牛顿线)**.** 在四边形$ABCD$中，直线AB,CD相交于E，直线AD,BC相交于F，线段EF,AC,BD的中点分别为L,M,N。求证：L,M,N三点共线。

证. 法一：先给一个面积法的证明。 因为$\overrightarrow{EA}\times\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EC}\times\overrightarrow{ED}=0$，$M=\dfrac{A+C}{2}$，$N=\dfrac{B+D}{2}$，所以

$$[EMN]=\frac{1}{2}\overrightarrow{EN}\times\overrightarrow{EM}=\frac{1}{8}(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{ED})\times(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC})=\frac{1}{8}(\overrightarrow{ED}\times\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{EC}\times\overrightarrow{EB})=\frac{1}{4}[ABCD],$$

同理，$[FMN]=\frac{1}{4}[ABCD]=[EMN]$。设$MN$交$EF$于$L'$点，由共边定理，$\dfrac{EL'}{FL'}=\dfrac{[EMN]}{[FMN]}=1$，所以$L'$是$EF$中点，$L',L$重合，$L,M,N$三点共线。

法二：还可以考察$\triangle ABF$的三条中位线，给一个用梅涅劳斯定理的证明。设P,Q,R分别是AB,BF,FA的中点，则P,M,R三点共线，P,N,Q三点共线，Q,L,R三点共线。在$\triangle ABF$中，因为C,D,E三点共线，所以由梅涅劳斯定理，

$$\frac{PN}{NQ}\cdot\frac{QL}{LR}\cdot\frac{RM}{MP}=\frac{AD}{DF}\cdot\frac{BE}{EA}\cdot\frac{FC}{CB}=1,$$

所以在$\triangle PQR$中，由梅涅劳斯定理知L,M,N三点共线。 □

例 1.8 (牛顿定理)**.** 设四边形$ABCD$的内切圆$\odot I$分别切AB,BC,CD,DA于点E,F,G,H。则有（1）I在四边形$ABCD$的牛顿线上；（2）AC,BD,EG,FH四线共点。

分析：本题的（1）问适合用面积法证明，（2）问应该把四线共点这个复杂的整体问题拆分成一个个局部的小问题。我们先证明AC,EG,FH三线共点。

证.（1）设$\odot I$半径为r，则四边形$ABCD$的对边长之和相等，$[AIB]+[CID]=\dfrac{r}{2}(AB+CD)=\dfrac{r}{2}(AD+BC)=[AID]+[BIC]$。

（2）只关注$\odot I$和A,C,E,G四点，设AC交EG于点P，我们证明$\dfrac{AP}{PC}=\dfrac{AE}{CG}$。 □

例 1.9 (蒙日定理)**.** 如图，$\odot O_1,\odot O_2,\odot O_3$两两的外公切线分别交于点$P,Q,R$。求证：$P,Q,R$三点共线。

证. 设$\odot O_1,\odot O_2,\odot O_3$的半径分别为$r_1,r_2,r_3$，则$\dfrac{O_1R}{RO_2}=\dfrac{r_1}{r_2}$，$\dfrac{O_2P}{PO_3}=\dfrac{r_2}{r_3}$，$\dfrac{O_3Q}{QO_1}=\dfrac{r_3}{r_1}$。在$\triangle O_1O_2O_3$中，由梅涅劳斯定理，$\dfrac{O_1R}{RO_2}\cdot\dfrac{O_2P}{PO_3}\cdot\dfrac{O_3Q}{QO_1}=\dfrac{r_1}{r_2}\cdot\dfrac{r_2}{r_3}\cdot\dfrac{r_3}{r_1}=1$，所以$P,Q,R$三点共线。 □

例 1.10.

证. □

例 1.11. $\triangle ABC$的内切圆$\odot I$与BC切于点D，M,K分别为BC,AD的中点。求证：M,I,K三点共线。

证. 法一：先给一个用梅涅劳斯定理的证明。因为$\dfrac{JI}{IA}=\dfrac{CJ}{CA}=\dfrac{BJ}{BA}=\dfrac{a}{b+c}$，$DM=\dfrac{c-b}{2}$，$CJ=\dfrac{ab}{b+c}$，$MJ=CM-CJ=\dfrac{a(c-b)}{2(b+c)}$，$\dfrac{DM}{MJ}=\dfrac{b+c}{a}$，所以在$\triangle AJD$中，$\dfrac{DM}{MJ}\cdot\dfrac{JI}{IA}=\dfrac{b+c}{a}\cdot\dfrac{a}{b+c}=1=\dfrac{DK}{KA}$。由梅涅劳斯定理，$M,I,K$三点共线。

法二：再给一个使用内切圆和旁切圆切点性质的证明。设D关于M,I的对称点分别为E,F，则E为$\triangle ABC$中点A所对的旁切圆在BC边上的切点。过F作BC的平行线分别交AB,AC于点B',C'。因为$ID\perp BC$，所以$IF\perp B'C'$，$B'C'$与$\odot I$切于点F，$\odot I$是$\triangle AB'C'$中点A所对的旁切圆。因为$\triangle ABC$与$\triangle AB'C'$位似，且E,F是位似中的对应点，所以A,E,F三点共线。因为M,I,K分别是DE,DF,DA的中点，所以M,I,K三点共线。 □

例 1.12. 四边形$ABCD$中，$AB=AD$，$BC=CD$。过BD上一点P作一条直线分别交AD,BC于点E,F，再过点P作一条直线分别交AB,CD于点G,H。设GF与EH分别与BD交于I,J。求证：$\dfrac{PI}{PB}=\dfrac{PJ}{PD}$ ①。

分析：这也是一道直线形的题目。我们将$\angle ABD$，$\angle CBD$，$\angle GPB$，$\angle FPB$设为参数，用以表示①式右边四条线段长的比值。

证. 设$\angle ABD=\angle ADB=\alpha$，$\angle CBD=\angle CDB=\beta$，$\angle GPB=\angle HPD=\gamma$，$\angle FPB=\angle EPD=\delta$，则①式$\Longleftrightarrow\dfrac{PI}{IB}=\dfrac{PJ}{JD}\Longleftrightarrow\dfrac{[PGF]}{[BGF]}=\dfrac{[PEH]}{[DEH]}$ ②。由正弦定理，

$$\frac{PG}{BG}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma},\qquad\frac{PF}{BF}=\frac{\sin\beta}{\sin\delta},\qquad\frac{PE}{DE}=\frac{\sin\alpha}{\sin\delta},\qquad\frac{PH}{DH}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma},$$

所以②式左边$=\dfrac{PG\cdot PF\sin(\gamma+\delta)}{BG\cdot BF\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{PE\cdot PH\sin(\gamma+\delta)}{DE\cdot DH\sin(\alpha+\beta)}=$②式右边。②，①式成立。 □

例 1.13. 如图，$\angle ABD=30^\circ$，$\angle DBC=40^\circ$，$\angle DCB=20^\circ$，$\angle DCA=50^\circ$。求$\angle DAC$的大小。

证. 设$\angle DAC = x$，则$\angle DAB = 40^\circ - x$，由角元塞瓦定理，

$$1 = \frac{\sin\angle DAC}{\sin\angle DAB} \cdot \frac{\sin\angle DBA}{\sin\angle DBC} \cdot \frac{\sin\angle DCB}{\sin\angle DCA} = \frac{\sin x}{\sin(40^\circ - x)} \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\sin 40^\circ} \cdot \frac{\sin 20^\circ}{\sin 50^\circ},$$

□

例 1.14. 如图，$\angle ABD = 20^\circ$，$\angle ABC = 60^\circ$，$\angle DCB = 50^\circ$，$\angle ACD = 30^\circ$。求$\angle DAB$和 $\angle ADC$的大小。

证. $\angle BAC = 40^\circ$，$\angle BDC = 50^\circ$，设$\angle DAB = \alpha$，则由角元塞瓦定理，

$$1 = \frac{\sin\angle DAB}{\sin\angle DAC} \cdot \frac{\angle DCA}{\sin\angle DCB} \cdot \frac{\sin\angle DBC}{\sin\angle DBA} = \frac{\sin\alpha}{\sin(40^\circ + \alpha)} \cdot \frac{\cos 10^\circ/2}{\sin 50^\circ \cdot \sin 20^\circ},$$

□

例 1.15.

证. □

例 1.16.

证. □

2 三角形的五心-1

例 2.1 (法尼亚诺问题)**.** 给定锐角$\triangle ABC$，求其内接三角形（$\triangle DEF$，满足D, E, F分别在BC, CA, AB上）中周长最小者。

证. □

例 2.2 (欧拉定理)**.** 设O, I分别为$\triangle ABC$的外心和内心，则$OI^2 = R^2 - 2Rr$。

证. □

例 2.3 (费马问题)**.** 给定$\triangle ABC$在平面上求一点P，使得$PA + PB + PC$取最小值。满足条件的点P称为$\triangle ABC$的费马点。

证. □

例 2.4 (2007，高联)**.** 在锐角$\triangle ABC$中，$AB < AC$，AD是边BC上的高，P是线段AD内一点。过P作$PE \perp AC$，垂足为E，作$PF \perp AB$，垂足为F。O_1, O_2分别是$\triangle BDF$，$\triangle CDE$的外心。求证：O_1, O_2, E, F四点共圆当且仅当P是$\triangle ABC$的垂心。

分析：本题的难点在于充分性的证明。我们的想法是设AP的长度为x，并用关于x的方程表示出四点共圆的条件，再从中解出x的值。

证. （1）若P是$\triangle ABC$的垂心，则B, P, E三点共线，C, P, F三点共线。因为$\angle BEC = \angle BFC = \frac{\pi}{2}$，所以$B, C, E, F$四点共圆。$\angle EO_1O_2 = \angle EBC = \angle EFC$，所以$O_1, O_2, E, F$四点共圆。
（2）若O_1, O_2, E, F四点共圆，因为$\angle PFA = \angle PEA = \frac{\pi}{2}$，所以$A, E, F, P$四点共圆。$\pi = \angle FO_1O_2 +$

$\angle FEO_2 = \angle FO_1P + \angle PO_1O_2 + \angle FEP + \angle PEO_2 = 2\angle PBF + \angle PBC + \angle PAF + \frac{\pi}{2} - \angle PCE = \angle PBF + B + \frac{\pi}{2} - B + \frac{\pi}{2} - \angle PCE = \pi + \angle PBF - \angle PCE$，所以$\angle PBF = \angle PCE$。设$AP = x$，则

$$\tan\angle PBF = \frac{x\sin\angle PAF}{c - x\cos\angle PAF} = \frac{x\cos B}{c - x\sin B}, \qquad \text{同理，} \tan\angle PCE = \frac{x\cos C}{b - x\sin C},$$

因为以上两式相等，所以$\cos B(b - x\sin C) = \cos C(c - x\sin B)$,

$$x\sin(B-C) = c\cos C - b\cos B = R(\sin 2C - \sin 2B) = 2R\sin(C-B)\cos(C+B) = 2R\sin(B-C)\cos A,$$

设H是$\triangle ABC$的垂心，因为$b > c$，$B > C$，所以$\sin(B-C) > 0$，$x = R\cos A = AH$，于是P, H重合，P是$\triangle ABC$的垂心。 □

例 2.5. 点O是$\triangle ABC$的外心，$\triangle ABC$的内切圆$\odot I$与BC, CA, AB分别相切于D, E, F，点K为$\triangle DEF$的垂心。设$\triangle ABC$的外接圆和内切圆的半径分别为R, r。求证：O, I, K三点共线，且$\frac{KI}{IO} = \frac{r}{R}$。

证. 设AI，BI，CI分别交$\odot O$于另一点P, Q, R，则$QA = QI$，$RA = RI$，$\triangle AQR \cong \triangle IQR$，$AI \perp QR$。同理$BI \perp PR$，$CI \perp PQ$，$I$为$\triangle PQR$的垂心。因为$IE = IF$，$AE = AF$，，所以$\triangle AEI \cong \triangle AFI$，$EF \perp AI$，$EF \parallel QR$，同理，$DF \parallel PR$，$DE \parallel PQ$，$\triangle DEF$与$\triangle PQR$位似，它们的外心分别为$I, O$，垂心分别为$K, I$，外接圆半径分别为$r, R$，所以$KI /\!/ IO$，$O, I, K$三点共线。$\frac{KI}{IO} = \triangle DEF$与$\triangle PQR$的位似比$= \frac{r}{R}$。

注：可以直接说 QR 是 AI 的中垂线，AI 是 EF 的中垂线，所以$AI \perp QR$，$AI \perp EF$。 □

例 2.6 (1998，高联)**.** 设O, I分别为$\triangle ABC$的外心和内心，AD是BC边上的高，I在线段OD上。求证：$\triangle ABC$的外接圆半径等于点A所对的旁切圆半径。

证. 由共边定理，我们有$\dfrac{AI}{IS} = \dfrac{[ADO]}{[SDO]} = \dfrac{AD}{OS} = \dfrac{b\sin C}{R} = 2\sin B\sin C$。另一边，$IS = BS = 2R\sin\dfrac{A}{2}$，$AI = AS - IS = 2R(\cos\dfrac{B-C}{2} - \sin\dfrac{A}{2}) = 4R\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$，$\dfrac{AI}{IS} = 2\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\Big/\sin\dfrac{A}{2}$。所以

$$2\sin B\sin C = 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\Big/\sin\frac{A}{2}, \qquad \frac{r_A}{R} = 4\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} = 1,$$

□

例 2.7.

证. □

例 2.8. 任给一$\triangle ABC$，P为平面上任意一点。求证：$PA^2 + PB^2 + PC^2 \geq \dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$，等号成立当且仅当$P$为$\triangle ABC$重心$G$。事实上，我们有下列恒等式：$PA^2 + PB^2 + PC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3PG^2$。

证. 这里给一个向量法的证明。

$$PA^2 = (\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GA})^2 = PG^2 + GA^2 + 2\overrightarrow{PG}\cdot\overrightarrow{GA},$$
$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3PG^2 + 2\overrightarrow{PG}\cdot(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}),$$

□

例 2.9 (2021，高联预赛北京)**.** G为正$\triangle ABC$的重心，P为三角形内任意一点。记$AB = a$，$GP = d$，又以PA, PB, PC为边的三角形面积为S。求证：$S = \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 - 3d^2)$。

证. □

例 2.10 (2009，东南数学奥林匹克；彭赛列闭合定理的特殊情形)**.** 任给$\triangle ABC$，设它的外接圆和内切圆分别为$\odot O, \odot I$，D, E, F是$\odot O$上的三个不同的点，满足DE, DF都与$\odot I$相切。求证：EF也和$\odot I$相切。

证. 设DI交$\odot O$于点S，则$\angle EDI = \angle FDI$，S是弧$\widehat{EF}$的中点。由圆幂定理和欧拉定理，$DI \cdot IS = R^2 - OI^2 = 2Rr$。 □

3 三角法入门

例 3.1. 四边形$ABCD$是长方形，点O是AC的中点，平面上一点E满足$AE \perp AC$，EO与AD相交于F。求证：$\angle ABE = \angle ACF$。

证. 我们把$\angle DAC$, AE设出来，用来作为参数描述图形形状。为了证明$\angle ABE$, $\angle ACF$相等，我们可以把它们的正切分别算出来，再证明它们的正切相等。设$\angle DAC = \alpha$, $AC = 2$, $AE = x$, $\angle AOE = \beta$，则$AB = 2\sin\alpha$, $\tan\beta = x$。设$EP \perp AB$于P，$FQ \perp AC$于Q，则$\tan\angle EBA = \dfrac{EP}{BP} = \dfrac{x\sin\alpha}{x\cos\alpha + 2\sin\alpha}$。由正弦定理及$AO = 1$，$AF = AO\dfrac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \dfrac{x}{\sin\alpha + x\cos\alpha}$。所以$\tan\angle ACF = \dfrac{FQ}{CQ} = \dfrac{AF\sin\alpha}{2 - AF\cos\alpha} = \dfrac{x\sin\alpha}{2(\sin\alpha + x\cos\alpha) - x\cos\alpha} = \tan\angle EBA$, $\angle ACF = \angle EBA$。 □

例 3.2. $\angle BAC = \dfrac{\pi}{2}$，点$D$是$BC$的中点，点$E$在线段$AB$上，$CE$交$AD$于点$O$。已知$BE = OE$，求证：$BO = \sqrt{2}AO$。

证. 法一：先给一个欧几里得式的证明。延长BO交AC于点K。由塞瓦定理，$\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{AK}{KC} \cdot \dfrac{CD}{DB} = \dfrac{AK}{KC}$，所以$EK \parallel BC$。设$J$是$BO$中点，因为$BE = EO$，所以$EJ \perp BO$，$\angle EJK = \angle EAK = \dfrac{\pi}{2}$，于是$A, E, J, K$四点共圆。$\angle AJK = \angle AEK = \angle ABD = \angle BAD$，又因为$\angle AOJ = \angle BOA$，所以$\triangle AOJ \backsim \triangle BOA$, $OA^2 = OJ \cdot OB = \dfrac{1}{2}OB^2$, $OB = \sqrt{2}OA$。

法二：再给一个三角法的证明。为了描述图形形状，我们把$\angle ABC$, $\angle ACE$两个角设出来，再把$BE = OE$视为描述这两个角之间关系的一个方程。设$\angle ACE = \alpha$, $\beta = \angle AEC = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$，则$BE = 2R \cdot \dfrac{\sin(C-\alpha)}{\cos\alpha}$, $OE = 2R\tan\alpha \cdot \dfrac{\sin^2 B}{\sin(C+\alpha)}$。因为$BE = OE$，所以$\sin^2 B\sin\alpha = \sin(C+\alpha)\sin(C-\alpha) = \sin^2 C - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2 B$。又因为$\angle EBO = \angle EOB = \frac{\beta}{2}$，所以

$$\sin B = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\sin\alpha}} = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1+\cos\beta}} = \sqrt{2}\sin\frac{\beta}{2}, \qquad \frac{BO}{AO} = \frac{\sin\angle BAO}{\sin\angle ABO} = \frac{\sin B}{\sin\frac{\beta}{2}} = \sqrt{2},$$

□

例 3.3. 在$\triangle ABC$中，$AB \perp AC$，点D在BC上，且非BC中点，$\frac{2}{AD} = \frac{1}{BD} + \frac{1}{CD}$。求证：（1）$\angle BDA = 2\angle BAD$；（2）若点$P$为$AD$中点，则$PD$平分$\angle BPC$。

证. （1）设$\angle ADB = D$, $\angle BAD = \alpha$, $\angle CAD = \beta$, $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$，则由正弦定理，有 $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin D}$, $\dfrac{CD}{AC} = \dfrac{\sin\beta}{\sin D}$。由题设条件，有 $2BD \cdot CD = AD \cdot (BD + CD) = AD \cdot BC = \dfrac{AB \cdot AC}{\sin D}$，于是 $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\sin\beta = 2\sin^2 D\dfrac{BD}{AB} \cdot \dfrac{CD}{AC} = \sin D$, $D = 2\alpha$或$\pi - 2\alpha$。若$D = \pi - 2\alpha$，则$\angle ABD = \angle BAD = \alpha$, $AD = BD$，同理，$AD = CD$，这与D不是BC中点矛盾！所以$D = 2\alpha$。

（2）因为 $\tan\angle BPD = \dfrac{BD\sin D}{PD - BD\cos D}$， $\tan\angle CPD = \dfrac{CD\sin D}{PD + CD\cos D}$，所以

$$\angle BPD = \angle CPD \iff \tan\angle BPD = \tan\angle CPD \iff BD \cdot (PD + CD\cos D) = CD \cdot (PD - BD\cos D)$$

$$\Longleftrightarrow 2BD\cdot CD\cos D=PD(CD-BD)\Longleftrightarrow 4\cos D=\frac{AD}{BD}-\frac{AD}{CD},\qquad ①$$

因为$\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{\sin(\pi-3\alpha)}{\sin\alpha}=1+2\cos 2\alpha=1+2\cos D$，$\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{\sin(\pi-3\beta)}{\sin\beta}=1+2\cos 2\beta=1-2\cos D$，所以①式成立。 □

例 3.4. 点A在凸四边形$SBCD$的内部，$AB=BC$，$AD=CD$，$\angle ASD=\angle BSC$。求证：$\dfrac{BS}{DS}=\dfrac{AB}{AD}$。

证. 法一：先给一个使用阿氏圆性质的证明。设$\angle BSD$的内角、外角平分线分别交直线BD于点J,K。

法二：再给一个三角法的证明，大的想法是用B,D两点处的方位角表示S,A,C三点的位置，尝试将$\angle ASD=\angle BSC$的关系转化为关于这些方位角的方程。设$\angle ABD=\angle CBD=B$，$\angle ADB=\angle CDB=D$，$\angle SBD=\gamma$，$\angle SDB=\delta$。分别考察$\triangle SBD$和点A，$\triangle SBD$和点C，由角元塞瓦定理，有

$$\frac{\sin\angle ASD}{\sin\angle ASB}=\frac{\sin\angle ADS}{\sin\angle ADB}\cdot\frac{\sin\angle ABD}{\sin\angle ABS}=\frac{\sin(\delta-D)}{\sin D}\cdot\frac{\sin B}{\sin(\gamma-B)},\qquad ①$$
$$\frac{\sin\angle CSB}{\sin\angle CSD}=\frac{\sin\angle CBS}{\sin\angle CBD}\cdot\frac{\sin\angle CDB}{\sin\angle CDS}=\frac{\sin(\gamma+B)}{\sin B}\cdot\frac{\sin D}{\sin(\delta+D)},\qquad ②$$

因为①式左边=②式左边，所以①式右边=②式右边。又由正弦函数的平方差公式和糖水恒等式，有

$$\frac{\sin^2 B}{\sin^2 D}=\frac{\sin(\gamma-B)\cdot\sin(\gamma+B)}{\sin(\delta-D)\cdot\sin(\delta+D)}=\frac{\sin^2\gamma-\sin^2 B}{\sin^2\delta-\sin^2 D}=\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\delta},$$

所以$\dfrac{BS}{DS}=\dfrac{\sin\delta}{\sin\gamma}=\dfrac{\sin D}{\sin B}=\dfrac{AB}{AD}$。 □

例 3.5. $\odot O$内切于凸四边形$ABCD$，点P在四边形$ABCD$外，点B,D均在$\angle APC$的内部，$\angle APB=\angle CPD$。求证：$\angle APO=\angle CPO$。

证. 本题来自金春来老师的讲义”反演变换“，但我暂时只会用三角法证明，大的想法还是用A,C两点处的方位角表示P,B,D,O四点的位置，尝试将$\angle APB=\angle CPD$的关系转化为关于这些方位角的方程。设$\angle BAO=\angle DAO=A$，$\angle BCO=\angle DCO=C$，$\angle PAO=\alpha$，$\angle PCO=\beta$，$\angle OAC=\gamma$，$\angle OCA=\delta$。分别考察$\triangle PAC$和点D，$\triangle PAC$和点B，由角元塞瓦定理，有

$$\frac{\sin\angle DPC}{\sin\angle DPA}=\frac{\sin\angle DCP}{\sin\angle DCA}\cdot\frac{\sin\angle DAC}{\sin\angle DAP}=\frac{\sin(\beta-C)}{\sin(C+\delta)}\cdot\frac{\sin(A+\gamma)}{\sin(\alpha-A)},\qquad ①$$
$$\frac{\sin\angle BPA}{\sin\angle BPC}=\frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle BAC}\cdot\frac{\sin\angle BCA}{\sin\angle BCP}=\frac{\sin(\alpha+A)}{\sin(A-\gamma)}\cdot\frac{\sin(C-\delta)}{\sin(\beta+C)},\qquad ②$$

因为①式左边=②式左边，所以①式右边=②式右边。又由正弦函数的平方差公式，有

$$\frac{\sin(\beta-C)\sin(\beta+C)}{\sin(\alpha-A)\sin(\alpha+A)}=\frac{\sin(C-\delta)\sin(C+\delta)}{\sin(A-\gamma)\sin(A+\gamma)},\qquad \frac{\sin^2\beta-\sin^2 C}{\sin^2\alpha-\sin^2 A}=\frac{\sin^2 C-\sin^2\delta}{\sin^2 A-\sin^2\gamma},\qquad ③$$

设$\odot O$的半径为R，则$\sin A=\dfrac{R}{AO}$，$\sin C=\dfrac{R}{CO}$。由正弦定理，$\dfrac{\sin C}{\sin A}=\dfrac{AO}{CO}=\dfrac{\sin\delta}{\sin\gamma}$。所以由糖水恒等式，$\dfrac{\sin^2 C}{\sin^2 A}=\dfrac{\sin^2\delta}{\sin^2\gamma}=$③式右边=③式左边$=\dfrac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}$。考察$\triangle PAC$和点$O$，由角元塞瓦定理，

$$\frac{\sin\angle OPA}{\sin\angle OPC}=\frac{\sin\angle OAP}{\sin\angle OAC}\cdot\frac{\sin\angle OCA}{\sin\angle OCP}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot\frac{\sin\delta}{\sin\beta}=1,$$

注：上一题中$AB+CD=AD+BC$，所以四边形$ABCD$有内切圆，可以看作本题的特殊情况。 □

例 3.6. 在$\triangle ABC$中，$AB\perp AC$，点M为BC中点，$AH\perp BC$，垂足为H，点L在AM上，$AP\perp BL$，垂足为P，直线AP与CL相交于点Q。求证：$HQ/\!/AB$。

证. 法一：设$\angle LBM=\angle HAP=\alpha$，$\angle LCM=\beta$，则$\angle LBA=\angle PAC=B-\alpha$，$\angle LCA=C-\beta$。设$AM=BM=CM=R$，则

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(B-\alpha)}=\frac{LM}{AL}\cdot\frac{AB}{BM},\qquad \frac{\sin\beta}{\sin(C-\beta)}=\frac{LM}{AL}\cdot\frac{AC}{CM},$$

由角元塞瓦定理，

$$\tan\angle AHQ=\frac{\sin\angle AHQ}{\sin\angle CHQ}=\frac{\sin\angle HAQ}{\sin\angle CAQ}\cdot\frac{\sin\angle ACQ}{\sin\angle HCQ}=\frac{\sin\alpha}{\sin(B-\alpha)}\cdot\frac{\sin(C-\beta)}{\sin\beta}=\frac{AB}{AC}=\tan C,$$

所以$\angle AHQ=C=\angle HAB$，$HQ/\!/AB$。

法二：设，则$AL=AB\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+B)}$。 □

例 3.7. 点O是$\triangle ABC$的外心，在线段AC,AB上分别各取一点D,E，点P,Q,R分别是线段BD,CE,DE的中点。点S在DE上，$OS\perp DE$。求证：P,Q,R,S四点共圆。

证. 设$\angle ADE=D$，$\angle AED=\angle SRP=E$，我们证明$\tan\angle RSP=-\tan\angle RQP$。 □

例 3.8. $\triangle ABC$中，D在$\angle BAC$的平分线上，$BF/\!/CD$交AC于F，$CE/\!/BD$交AB于E。设M,N分别是CE,BF的中点，求证：$AD\perp MN$。

证. 法一：只需证明$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{MN}=0$ ①。我们有$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE})$，①式左边$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE})$。因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}&=AB\cdot AD\cos\frac{A}{2},\qquad &\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}&=AF\cdot AD\cos\frac{A}{2},\\ \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}&=AC\cdot AD\cos\frac{A}{2},\qquad &\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}&=AE\cdot AD\cos\frac{A}{2},\end{aligned}$$

所以只需证明$AB+AF=AC+AE$ ②。设$\angle DBC=\angle BCE=\alpha$，$\angle DCB=\angle CBF=\beta$，则由正弦定理，$AE=b\cdot\dfrac{\sin\angle ACE}{\sin\angle AEC}=b\cdot\dfrac{\sin\angle(C+\alpha)}{\sin\angle(B-\alpha)}$。同理，$AF=c\cdot\dfrac{\sin(B+\beta)}{\sin(C-\beta)}$。于是

$$\begin{aligned}②式\iff b\cdot\frac{\sin(C+\alpha)+\sin(B-\alpha)}{\sin(B-\alpha)}&=c\cdot\frac{\sin(B+\beta)+\sin(C-\beta)}{\sin(C-\beta)},\\ \iff\sin B\cdot\frac{\sin\frac{B+C}{2}\cos(\frac{C-B}{2}+\alpha)}{\sin(B-\alpha)}&=\sin C\cdot\frac{\sin\frac{B+C}{2}\cos(\frac{B-C}{2}+\beta)}{\sin(C-\beta)},\\ \iff\sin B\cdot\frac{\sin(\frac{A}{2}+B-\alpha)}{\sin(B-\alpha)}&=\sin C\cdot\frac{\sin(\frac{A}{2}+C-\beta)}{\sin(C-\beta)},\qquad ③\end{aligned}$$

在$\triangle DBC$中，由角元塞瓦定理，

$$1=\frac{\sin\angle CBA}{\sin\angle DBA}\cdot\frac{\sin\angle BDA}{\sin\angle CDA}\cdot\frac{\sin\angle DCA}{\sin\angle BCA}=\frac{\sin B}{\sin(B-\alpha)}\cdot\frac{\sin(\frac{A}{2}+B-\alpha)}{\sin(\frac{A}{2}+C-\beta)}\cdot\frac{\sin(C-\beta)}{\sin C},$$

所以③式成立，②，①式成立，$AD \perp MN$。

法二：因为$AF = AC + CF$, $AE = AB + BE$，所以②式$\Longleftrightarrow BE = CF$　④。由正弦定理，

$$\frac{BE}{BC} = \frac{\sin\angle BCE}{\sin\angle BEC} = \frac{\sin\angle DBC}{\sin\angle DBA} \quad ⑤, \qquad \frac{CF}{BC} = \frac{\sin\angle CBF}{\sin\angle BFC} = \frac{\sin\angle DCB}{\sin\angle DCA} \quad ⑥,$$

又在$\triangle ABC$中由角元塞瓦定理，⑤式右边$= \dfrac{\sin\angle DCB}{\sin\angle DCA} \cdot \dfrac{\sin\angle DAC}{\sin\angle DAB}$ =⑥式右边，所以④式成立，$AD \perp MN$。 □

例 3.9 (2022，高联A卷)**.** 在凸四边形$ABCD$中，$\angle ABC = \angle ADC = \dfrac{\pi}{2}$，对角线$BD$上一点$P$满足$\angle APB = 2\angle CPD$，线段$AP$上两点$X, Y$满足$\angle AXB = 2\angle ADB$，$\angle AYD = 2\angle ABD$。求证：$BD = 2XY$。

证. 法一：先给一个欧几里得式的证明。注意到CP延长线平分$\angle APB$，这提示我们沿CP作轴对称构造辅助点和辅助线。设D关于PC的对称点为D'，则$\angle AXO = \angle BDC = \angle PD'C$，所以$OX /\!/ CD'$。

法二：再给一个三角法的证明。我们依次在$\triangle AXO$, $\triangle APC$, $\triangle PCD$中三次使用正弦定理：

$$OX = AO \cdot \frac{\sin\angle XAO}{\sin\angle AXO} = \frac{R\sin\angle XAO}{\sin\angle BDC}, \qquad \sin\angle XAO = \sin\angle APC \cdot \frac{PC}{AC} = \frac{PC\sin\angle APC}{2R},$$
$$PC\sin\angle APC = PC\sin\angle BPC = d(C, BD) = CD\sin\angle BDC,$$

所以$OX = \dfrac{R \cdot PC\sin\angle APC}{2R\sin\angle BDC} = \dfrac{CD}{2}$。 □

例 3.10. $\odot O$经过$\triangle ABC$的两个顶点，且与边AB, BC分别交于两个不同的点K, N，$\triangle ABC$和$\triangle KBN$的外接圆交于点B和另一点M。求证：$\angle OMB = \dfrac{\pi}{2}$。

证. □

4　圆的性质-1

例 4.1. AH为$\triangle ABC$的边BC上的高，D为BC的中点，L为AD的中点，$\odot(DLH)$与BL, CL分别交于点N和M。求证：LH, BM, CN交于一点。

分析：最直接的想法是在$\triangle LBC$中使用塞瓦定理，证明$\dfrac{LN}{NB} \cdot \dfrac{BH}{HC} \cdot \dfrac{CM}{ML} = 1$　①。此时$\dfrac{BH}{CH}$是好项，$\dfrac{LN}{NB}$，$\dfrac{CM}{ML}$是坏项，可以用圆幂定理$BN \cdot BL = BD \cdot BH$, $CM \cdot CL = CD \cdot CH$把$BN, CM$变好。

证. 法一：设P为DH中点，则$LP /\!/ AH$，$LP \perp BC$。由定差幂线定理，$LC^2 - LD^2 = CP^2 - PD^2 = CH \cdot CD = CM \cdot CL$，所以$LD^2 = LC^2 - CM \cdot CL = LC \cdot LM$，同理，$LD^2 = LN \cdot LB$。所以

$$\frac{LN}{NB} \cdot \frac{CM}{ML} = \frac{LN \cdot LB}{NB \cdot LB} \cdot \frac{CM \cdot CL}{ML \cdot CL} = \frac{LD^2}{BD \cdot BH} \cdot \frac{CD \cdot CH}{LD^2} = \frac{CH}{BH},$$

所以①式成立，LH, BM, CN交于一点。

法二：因为$\angle LNH = \angle LDH = \angle LHD$，所以$\triangle LNH \backsim \triangle LHB$, $LH^2 = LN \cdot LB$。也可由$\angle LND = \pi - \angle LHD = \pi - \angle LDH = \angle LDB$，知$\triangle LND \backsim \triangle LDB$, $LD^2 = LN \cdot LB$。其余论述同法一。

法三：由以上论述知$LD^2 = LC \cdot LM = LN \cdot LB$，所以$B, N, M, C$四点共圆。延长$HL$至$E$，使得$HL = LE$，则$\angle MLH = \angle MDH$，$\angle MHL = \angle MNL = \angle MCD$，所以$\triangle MHL \backsim \triangle MCD$。于是$\dfrac{BC}{EH} = \dfrac{DC}{LH} = \dfrac{MC}{MH}$，所以$\triangle MHE \backsim \triangle MCB$，$\angle MEH = \angle MBH$，$B, H, M, E$四点共圆。同理，$C, H, N, E$四点共圆。由根心定理，三点共点。 □

例 4.2. $\triangle ABC$外接圆为$\odot O$，M为AB中点，$\odot O$的直径KL垂直于AB。一个过M,L的圆与KC交于P,Q（P更靠近C）。$\triangle KMQ$的外接圆与LQ的延长线交于点R。求证：A,B,P,R四点共圆。

证. $\triangle KAQ \backsim \triangle KPA$, $\triangle KBQ \backsim \triangle KPB$, $\triangle LAQ \backsim \triangle LRA$, $\triangle LBQ \backsim \triangle LRB$。所以$\angle APB + \angle ARB = \angle APK + \angle BPK + \angle ARL + \angle BRL = \angle KAQ + \angle KBQ + \angle LAQ + \angle LBQ = \pi$，$A,B,P,R$四点共圆。 □

例 4.3. $\triangle ABC$中，$AB \neq AC$，O为它的外心，$\angle BAC$的平分线与BC交于点D，点E与点D关于BC中点M对称。过D,E分别作BC的垂线，与AO,AD分别交于点X,Y。求证：B,X,C,Y四点共圆。

证. 设AD交$\odot O$于点S，则S为劣弧BC中点。$\triangle ESY \backsim \triangle AXD$，$XD \cdot EY = ES \cdot AD = DS \cdot AD = BD \cdot CD = BD \cdot CE$。 □

例 4.4 (八点圆定理)**.** 如图，$AC \perp BD$于O，过O作四边形$ABCD$各边的垂线分别交各组对边于点E,E'，F,F'，G,G'，H,H'。求证：上述八点共圆。

证. $\angle DOE' = \angle BOE = \angle OAB$, $\angle COE' = \angle AOE = \angle OBA$。由张角定理，

$$\frac{\sin\angle COD}{OE'} = \frac{\sin\angle DOE'}{OC} + \frac{\sin\angle COE'}{OD} = \frac{\sin\angle OAB}{OC} + \frac{\sin\angle OBA}{OD} = \frac{OB}{AB\cdot OC} + \frac{OA}{AB\cdot OD},$$

所以$OE\cdot OE' = \dfrac{OA\cdot OB}{AB}\Big/(\dfrac{OB}{AB\cdot OC} + \dfrac{OA}{AB\cdot OD}) = \dfrac{OA\cdot OB\cdot OC\cdot OD}{OA\cdot OC + OB\cdot OD}$。同理，$OF\cdot OF' = OG\cdot OG' = OH\cdot OH' = \dfrac{OA\cdot OB\cdot OC\cdot OD}{OA\cdot OC + OB\cdot OD}$，由圆幂定理知八点共圆。 □

例 4.5 (江泽民定理)**.** 任意一个五角星，每个角上交出一个小三角形，作出五个三角形的外接圆，考察相邻两圆除去边上交点之外的另一个交点，共五个点。求证：这五点共圆。

分析：本题中五角星的五条边所在直线任取三条能围成10个不同的三角形。考虑其中四条边所在直线，这就是四边形的密克定理的构型，我们能得到许多四点共圆的关系。

证. 由四边形的密克定理，A,G,M,E四点共圆，A,I,M,B四点共圆。A,K,G,M,E五点共圆。 □

例 4.6. 若$\triangle ABC$中D,E,F分别在BC,CA,AB上，且$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$。求证：$BC \le 2EF$。

证. 设O是$\triangle DEF$的垂心，则$\angle DOE = \pi - \angle DFE = \pi - C$，所以$C,D,E,O$四点共圆。同理，$A,E,F,O$四点共圆，$B,D,F,O$四点共圆。所以$\angle OCD = \angle OED = \dfrac{\pi}{2} - \angle EDF = \angle OFD = \angle OBD$，$OC = OB$。同理，$OC = OA$，所以$O$是$\triangle ABC$的外心。设$D',E',F'$分别是$BC,CA,AB$的中点，则$\triangle D'E'F' \backsim \triangle ABC$，$O$是$\triangle D'E'F'$的垂心。于是$\angle OE'F' = \dfrac{\pi}{2} - \angle D'F'E' = \dfrac{\pi}{2} - \angle DFE = \angle OEF$，同理，$\angle OF'E' = \angle OFE$，所以$\triangle OE'F' \backsim \triangle OEF$，$\dfrac{EF}{E'F'} = \dfrac{OE}{OE'} \ge 1$，$BC = 2E'F' \le 2EF$。 注：$\triangle DEF$, $\triangle D'E'F'$之间差了一个以O为中心的位似旋转变换。O是$\triangle ABC$中关于点D,E,F的密克点。 □

例 4.7. 以$\triangle ABC$的边AB为直径作圆，交BC于D，交$\angle BAC$的平分线于E。过C作直线AE的垂线，垂足为F，点M是BC的中点。求证：D,E,F,M四点共圆。

证. 设N是AC中点，因为$CF \perp AF$，所以$NA = NF = NC$, $\angle NFA = \angle NAF = \angle FAB$, $NF /\!/ AB$。又因为$NM /\!/ AB$，所以N,M,F三点共线，$\angle MFA = \angle FAB = \angle MDE$，$D,E,F,M$四点共圆。 □

例 4.8. $\odot O_1$与$\odot O_2$相交于A,B两点，过A作任一直线分别再交$\odot O_1$，$\odot O_2$于C和D，过C作$\odot O_1$的切线，过D作$\odot O_2$的切线，两切线相交于P。点E在线段CD上，$AC = DE$。求证：$\angle CPB = \angle DPE$。

分析：其实题中各点能组成一个证明托勒密定理时出现的构型。

证. 因为$\angle BCD=\angle CBA+\angle DBA=\angle PCA+\angle PDA=\pi-\angle CPD$，所以$C,B,D,P$四点共圆，$\angle BCA=\angle BPD$，$\angle CAB=\pi-\angle DAB=\angle PDB$，所以$\triangle CAB\backsim\triangle PDB$，同理，$\triangle DAB\backsim\triangle PCB$，$\frac{DE}{PD}=\frac{AC}{PD}=\frac{BC}{PB}=\frac{AB}{BD}$。又因为$\angle PDE=\angle PBC$，所以$\triangle PDE\backsim\triangle PBC$，$\angle CPB=\angle DPE$。 □

例 4.9. $ABCD$的对角线相交于O，圆c_1经过点A和O，且与BD相切，圆c_2经过点B和O，且与AC相切，c_1与c_2相交于O和P，c_1交AD于A和Q，c_2交BC于B和R。求证：点O是$\triangle PQR$的外心。

证. 设$OA=a$，$OB=b$，$\angle AOB=\theta$，则$\angle O_1OA=\angle O_2OB=\frac{\pi}{2}-\theta$，$OO_1=\frac{a}{2\sin\theta}$，$OO_2=\frac{b}{2\sin\theta}$，$\angle AOD=\angle O_1OO_2=\pi-\theta$，$\frac{OO_1}{OO_2}=\frac{a}{b}=\frac{OA}{OD}$，所以$\triangle AOD\backsim\triangle O_1OO_2$，$\angle PAO=\frac{1}{2}\angle PO_1O=\angle OO_1O_2=\angle OAQ$，所以$OP=OQ$，同理$OP=OR$，于是$O$为$\triangle PQR$的外心。 □

例 4.10. A,B,C,D四点共圆，过C和D作任一圆分别交直线AD,BD于E,F（均不与D重合），过E作AB的平行线交直线BD于G。求证：$\frac{BF}{FG}=\frac{BC}{CD}\cdot\frac{AD}{AB}$ ①。

分析：本题中出现了两圆相交，且过其中一个交点引两条割线的构型，这能带来一对位似旋转的三角形。①式的各项中，右边四条边长是好项，左边BF是中性项，FG是坏项，但可以把它加上BF变成BG，这是一个中性项。

证. ①式$\Longleftrightarrow\frac{BF}{BF+FG}=\frac{BC\cdot AD}{BC\cdot AD+AB\cdot CD}$，由托勒密定理，即$\frac{BF}{BG}=\frac{BC\cdot AD}{BD\cdot AC}$ ②。因为$EG\parallel AB$，所以$BG=AE\cdot\frac{BD}{AD}$，因为$\angle CBF=\angle CAE$，$\angle BFC=\pi-\angle CFD=\pi-\angle CED=\angle AEC$，所以$\triangle BFC\backsim\triangle AEC$，$BF=AE\cdot\frac{BC}{AC}$。②式左边$=\frac{AE\cdot BC}{AC}\cdot\frac{AD}{AE\cdot BD}=$②式右边，所以①式成立。 □

例 4.11. $\odot O_1$与$\odot O_2$相交于P和Q，直线AB与$\odot O_1$相切于A，与$\odot O_2$相切于B。过P作$\odot O_1$的切线交$\odot O_2$于C，直线AP与BC相交于R。求证：直线BP,BR均与$\triangle PQR$的外接圆相切。

证. 这题有一个纯导角的做法。因为$\angle QAP=\angle QPC=\angle QBR$，所以$A,B,Q,R$四点共圆。$\angle PQR=\angle PQB+\angle BQR=\angle PBA+\angle PAB=\angle BPR$，$\angle BRP=\angle BQA=\angle PQA+\angle PQB=\angle PAB+\angle PBA=\angle BPR=\angle PQR$，所以$BP,BR$均与$\triangle PQR$的外接圆相切。 □

例 4.12. 给定$\triangle ABC$，M是边BC上的动点，线段BM的中垂线与直线AB相交于P，线段CM的中垂线与直线AC相交于Q。求证：$\odot(APQ)$经过一个异于A的定点。

解. 设O为$\triangle ABC$的外心，则$AP=c-BP=c-\frac{BM}{2\cos B}$，

$$\tan\angle OPA=\frac{AO\sin\angle OAP}{AP-AO\cos\angle OAP}=\frac{R\cos C}{AP-R\sin C}=\frac{2R\cos C\cos B}{(c-R\sin C)\cdot 2\cos B-BM}=\frac{2R\cos C\cos B}{c\cdot\cos B-BM},$$

同理，$\tan\angle OQA=\frac{2R\cos C\cos B}{b\cdot\cos C-CM}$。因为$c\cdot\cos B-BM+b\cdot\cos C-CM=a-a=0$，所以$\tan\angle OPA+\tan\angle OQA=0$，$\angle OPA+\angle OQA=\pi$，于是$O,P,A,Q$四点共圆，$\triangle APQ$的外接圆经过异于$A$的定点$O$。 □

5 向量法入门

例 5.1. 任意给定两个正数a,b，在凸四边形$ABCD$各边上分别取一点E,F,G,H，使得$\frac{AE}{EB}=\frac{DG}{GC}=a$，$\frac{AH}{HD}=\frac{BF}{FC}=b$，$EG$交$HF$于$O$。求证：$\frac{HO}{OF}=a$，$\frac{EO}{OG}=b$。

证. 法一：先给一个欧几里得式的证明，它的关键是做了若干次平移，把本来没有公共点，但有比例关系的边集中起来。作点B', E'使得$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{EE'} = \overrightarrow{AH}$，作点$C', G'$使得$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{DH}$。于是$\dfrac{BB'}{CC'} = \dfrac{AH}{DH} = \dfrac{BF}{FC}$，$\angle B'BF = \angle C'CF$，所以$\triangle B'BF \backsim \triangle C'CM$。设$E'G'$交$EG$于$O'$点，因为$EE' \parallel GG'$，$\angle O'EE' = \angle O'GG'$，$\angle O'E'E = \angle O'G'G$，所以$\triangle O'EE' \backsim \triangle O'GG'$，$\dfrac{EO'}{GO'} = \dfrac{E'O'}{G'O'} = \dfrac{AH}{DH} = b = \dfrac{B'F}{C'F}$。又因为$\dfrac{HE'}{E'B'} = \dfrac{AE}{EB} = \dfrac{DG}{GC} = \dfrac{HG'}{G'C'}$，所以$E'G' /\!/ B'C'$，$\dfrac{E'O'}{B'F} = \dfrac{G'O'}{C'F} = \dfrac{E'G'}{B'C'} = \dfrac{HE'}{HB'}$，$\angle HB'F = \angle HE'O'$，所以$\triangle HE'O' \backsim \triangle HB'F$，$\angle E'HO' = \angle B'HF$，于是$H, O', F$三点共线，$O, O'$重合。

法二：。 □

例 5.2. 过$\odot O$外一点P作$\odot O$的两条切线PA, PB，切点分别为A, B。点C是直线AB上一点，M是PC的中点，以PC为直径作圆与$\odot O$的一个交点为K。求证：$MK \perp OK$。

证. 设R为$\odot O$半径，则$OK = R$，$MK \perp OK \Longleftrightarrow MO^2 = MK^2 + R^2$ ①。

$$MK^2 = MC^2 = |\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP})|^2 = \frac{1}{4}(OC^2 + OP^2 - 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP}),$$
$$MO^2 = |\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP})|^2 = \frac{1}{4}(OC^2 + OP^2 + 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP}),$$

设N为AB中点，则$CN \perp OP$，$MO^2 - MK^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP} = ON \cdot OP = R^2$，①式成立，所以$MK \perp OK$。 □

例 5.3. 直线AB与$\odot O$相切于B，点C在$\odot O$上，$BC \perp CD$，$AC \perp BD$，点E在线段AB上，$CE \perp OD$。求证：$AE = BE$。

证. 设F为AB中点，我们证明$\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{OD} = 0$ ①。因为$AC \perp BD$，$BC \perp CD$，所以

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CA} \cdot (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB}) = CA \cdot OB \cos\measuredangle(CA, OB) = CA \cdot OB \sin A = OB \cdot d(C, AB),$$
$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}) = -CB \cdot OC \cos\angle OCB = -OC \cdot CB \sin\angle CBA = -OC \cdot d(C, AB),$$
$$\text{①式左边} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{OD}) = (OB - OC) \cdot d(C, AB) = 0,$$

所以①式成立，$CF \perp OD$。于是E, F重合，$AE = BE$。 □

例 5.4. $\triangle ABC$内接于$\odot O$，点I是$\triangle ABC$的内心，BI, AC相交于E，CI, AB相交于F，AI延长线交$\odot O$于S，点M是IO的中点。求证：$SM \perp EF$。

分析：这题不容易寻求纯几何的做法，但可以使用向量法硬算下述①式。可以使用$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{SM} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{SI})$把复杂的$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{SM}$化简为由$\triangle ABC$的边、角等基本要素表示的代数式。

证. $SM \perp EF \Longleftrightarrow 0 = \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{SM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{EF} \cdot (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{SI})$ ①。$\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{SO} = EA \cdot SO \cos(\dfrac{\pi}{2} - C) = \dfrac{bc}{a+c} \cdot R \sin C = \dfrac{bc^2}{2(a+c)}$，同理，$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{SO} = -\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{SO} = -\dfrac{b^2c}{2(a+b)}$，所以

$$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{SO} = (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}) \cdot \overrightarrow{SO} = \frac{bc}{2}(\frac{c}{a+c} - \frac{b}{a+b}) = \frac{abc(c-b)}{2(a+c)(a+b)}, \qquad ②$$

另一边，$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{SI}=SI\cdot EA\cos\frac{A}{2}=2R\sin\frac{A}{2}\cdot\frac{bc}{a+c}\cos\frac{A}{2}=\frac{abc}{2(a+c)}$。同理，$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{SI}=-\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{SI}=-\frac{abc}{2(a+b)}$，所以

$$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{SI}=(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF})\cdot\overrightarrow{SI}=\frac{abc}{2}(\frac{1}{a+c}-\frac{1}{a+b})=\frac{abc(b-c)}{2(a+c)(a+b)},\qquad ③$$

②, ③式相加，得①式成立，所以$SM\perp EF$。 □

6 几何选讲-1

例 6.1 (伊朗引理)**.** $\triangle ABC$内切圆$\odot I$切AC,AB于E,F，P,Q分别为AB,BC中点，B在CI上的投影为N。求证：P,N,Q三点共线，F,N,E三点共线。

证. 因为$\angle CNQ=\angle NCQ=\angle NCA$，所以$NQ/\!/AC$，又因为$PQ/\!/AC$，所以$P,N,Q$三点共线。因为$PN=PQ-QN=\frac{b-a}{2}=PF$，所以$\angle PNF=\angle PFN=\frac{\pi-A}{2}=\angle AFE$，于是$F,N,E$三点共线。 □

例 6.2 (清宫定理)**.** 设P,Q为$\triangle ABC$外接圆上异于A,B,C的两点，P点关于三边BC,CA,AB的对称点分别为U,V,W，QU,QV,QW分别与直线BC,CA,AB交于点D,E,F。求证：D,E,F三点共线。

证. 在$\triangle ABC$中，由梅涅劳斯定理，D,E,F三点共线$\Longleftrightarrow\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1\quad①$。使用面积法处理①式左边的三个比例，由共边定理，我们有

$$\frac{AF}{FB}=\frac{[AWQ]}{[BWQ]}=\frac{AW\cdot AQ\sin\angle WAQ}{BW\cdot BQ\sin\angle WBQ},\qquad\frac{BD}{DC}=\frac{[BUQ]}{[CUQ]}=\frac{BU\cdot BQ\sin\angle UBQ}{CU\cdot CQ\sin\angle UCQ},$$

$$\frac{CE}{EA}=\frac{[CVQ]}{[AVQ]}=\frac{CV\cdot CQ\sin\angle VCQ}{AV\cdot AQ\sin\angle VAQ},\qquad\angle WAQ=\angle PAB+\angle QAB=\angle PCB+\angle QCB$$

$$=\angle UCQ,\qquad\text{同理，}\angle UBQ=\angle PBC+\angle QBC=\angle PAC+\angle QAC=\angle VAQ,$$

$$\angle VCQ=\angle PCE+\angle QCE=\angle PBA+\angle QBA=\angle WBQ,$$

又因为$AV=AP=AW,\ BW=BP=BU,\ CU=CP=CV$，所以①式成立。 □

例 6.3. 等腰梯形$ABCD$中，$AB=3CD$，过A和C分别作其外接圆的切线，两者交于点K。求证：$\triangle KDA$是直角三角形。

证. $\angle ADE=\frac{\pi}{2}-\angle DAB=\frac{\pi}{2}-\angle CBA=\frac{\pi}{2}-\angle CAK=\angle AKE$，所以$A,K,D,E$四点共圆。 □

例 6.4 (旁切圆的欧拉定理)**.** 设$\triangle ABC$的外心和点A所对的旁心分别为O,I_A，$\odot I_A$的半径为r_A。求证：$OI_A^2=R^2+2Rr_A$。由此得出$r_A=R$当且仅当$OI_A=\sqrt{3}R$。

证. $OI_A^2-R^2=I_AM\cdot I_AA=MC\cdot I_AA=ML\cdot I_AD=2Rr_A$。 □

例 6.5 (关于三角形旁切圆的彭赛列闭合定理)**.** 设$\triangle ABC$的外接圆和点A所对的旁切圆分别为$\odot O,\odot I_A$，D,E,F是$\odot O$上的三个不同的点，满足DE,DF的延长线都与$\odot I_A$相切。求证：线段EF也和$\odot I_A$相切。

证. 由旁切圆的欧拉定理，$I_AL=\frac{2Rr_A}{I_AD}=2R\sin\frac{D}{2}=EL=FL$。所以$L$为$\triangle EFI_A$的外心，$\angle I_AEF=\frac{1}{2}\angle I_ALF=\frac{\pi-\angle DEF}{2}$。 □

例 6.6. 设P是$\triangle ABC$外接圆上异于A, B, C的任意一点，过P作三边BC, CA, AB的垂线，垂足分别为D, E, F，H是$\triangle ABC$的垂心。求证：西姆松线DEF平分PH。

证. 设P关于F的对称点为Q，关于E的对称点为R，则AB是PQ的中垂线，AC是PR的中垂线。所以$\angle AQB = \angle APB = C = \pi - \angle AHB$，$A, H, B, Q$四点共圆。同理，$\angle ARC = \angle APC = B = \pi - \angle AHC$，$A, H, C, R$四点共圆。于是$\angle AHQ = \angle ABQ = \angle ABP$，$\angle AHR = \angle ACR = \angle ACP$，$\angle AHQ + \angle AHR = \angle ABP + \angle ACP = \pi$，$Q, H, R$三点共线。因为$F, M, E$分别是$PQ, PH, PR$的中点，所以$F, M, E$三点共线。 $\square$

例 6.7. 在锐角$\triangle ABC$的AB, AC边上分别取点E, F使得$BE \perp CF$，然后在$\triangle ABC$的内部取点X使得$\angle XBC = \angle EBA$，$\angle XCB = \angle FCA$。求证：$\angle EXF = \dfrac{\pi}{2} - A$。

证. $\square$

例 6.8. 已知菱形$ABCD$，作平行四边形$APQC$，使得B在其内部，且AP与菱形的边长相等。求证：B是$\triangle DPQ$的垂心。

证. $\square$