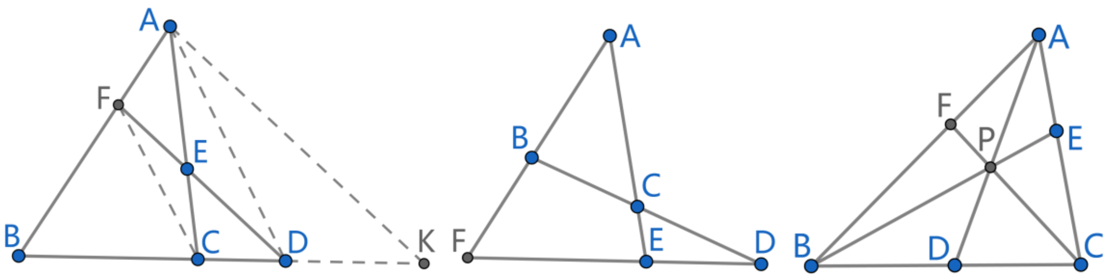
古典几何中的重要定理

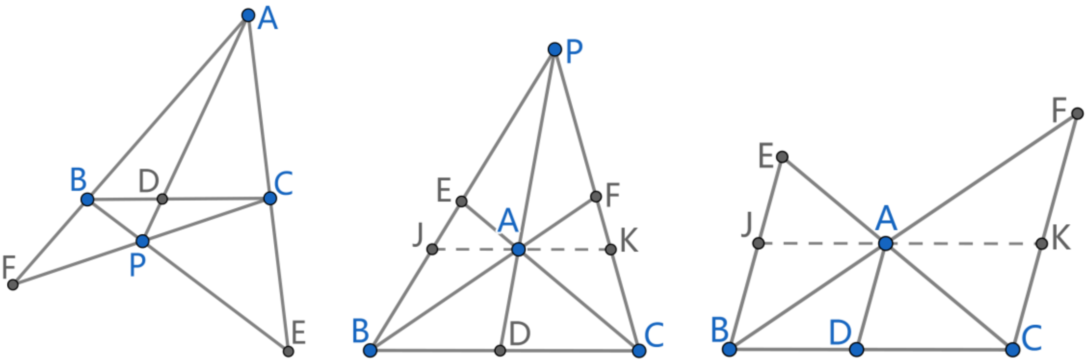
一、知识要点

记号和约定：设 $d(P,XY)$ 为点 P 到直线 XY 的距离。设 $[ABC]$ 为 $\triangle ABC$ 的面积。

定理 1.（梅涅劳斯定理）在 $\triangle ABC$ 中，设 D,E,F 分别为直线 BC,CA,AB 上的点，且不是 $\triangle ABC$ 的顶点。则 D,E,F 三点共线当且仅当 $\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AF}{FB}=-1$，这里使用线段的有向长度，$\dfrac{BD}{DC}>0$ 当且仅当 D 在 B,C 两点之间。



定理 2.（塞瓦定理）在 $\triangle ABC$ 中，设 D,E,F 分别为直线 BC,CA,AB 上的点，且不是 $\triangle ABC$ 的顶点。则 AD,BE,CF 三线共点或平行当且仅当 $\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AF}{FB}=1$，这里使用线段的有向长度。



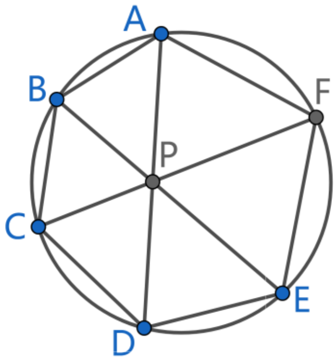
定理 3.（角元塞瓦定理）在 $\triangle ABC$ 中，AD,BE,CF 三线共点或平行当且仅当

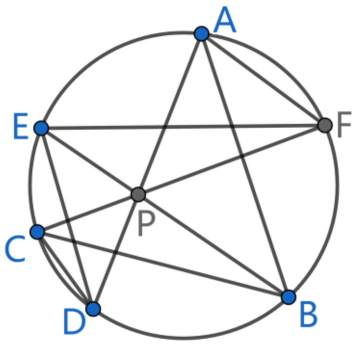
$\dfrac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}\cdot\dfrac{\sin\angle ACF}{\sin\angle BCF}\cdot\dfrac{\sin\angle CBE}{\sin\angle ABE}=1$。插图同塞瓦定理，但不要求 D,E,F 三点在 $\triangle ABC$ 的三边上。

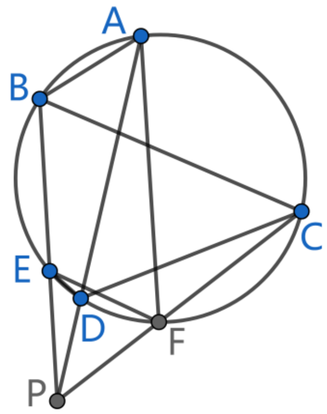
推论 1.（三弦共点定理）设 $ABCDEF$ 为圆内接六边形（可以有边自交），则 AD,BE,CF 三线共点或平行当且仅当 $\dfrac{AB}{BC}\cdot\dfrac{CD}{DE}\cdot\dfrac{EF}{FA}=1$。

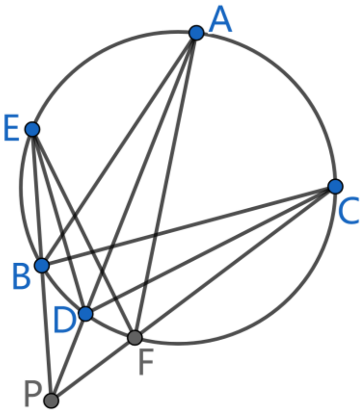
定理 3.（1）（托勒密定理）在圆内接四边形 $ABCD$ 中，$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$；

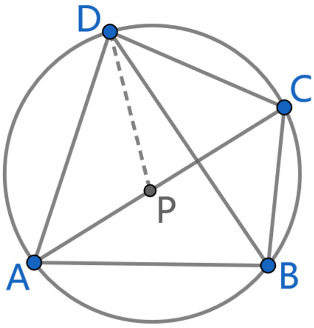
（2）（托勒密不等式）在任意凸四边形 $ABCD$ 中，$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$，等号成立当且仅当 A, B, C, D 四点共圆。

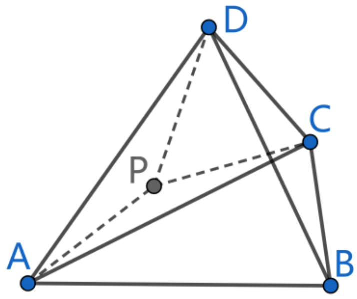




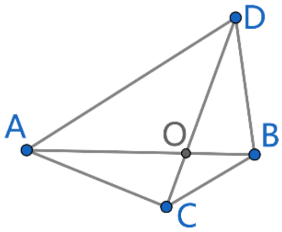


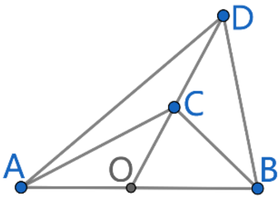


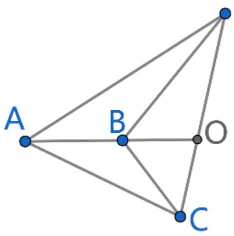


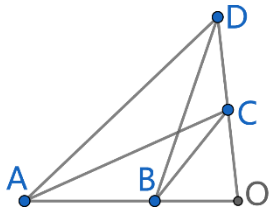


定理 4.（共边定理）若直线 AB 与直线 CD 相交于点 O，则 $\dfrac{[ABC]}{[ABD]} = \dfrac{d(C, AB)}{d(D, AB)} = \dfrac{CO}{DO}$。





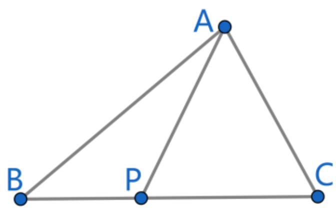




定理 5.（张角定理）点 P 在 $\angle BAC$ 内部，则 B, P, C 三点共线当且仅当

$\dfrac{\sin \angle BAC}{AP} = \dfrac{\sin \angle BAP}{AC} + \dfrac{\sin \angle PAC}{AB}$。

定理 6.（斯特瓦尔特定理）插图同上，在 $\triangle ABC$ 中，P 是 BC 上的一点，则 $AP^2 = \dfrac{AC^2 \cdot BP + AB^2 \cdot CP}{BC} - BP \cdot CP$。



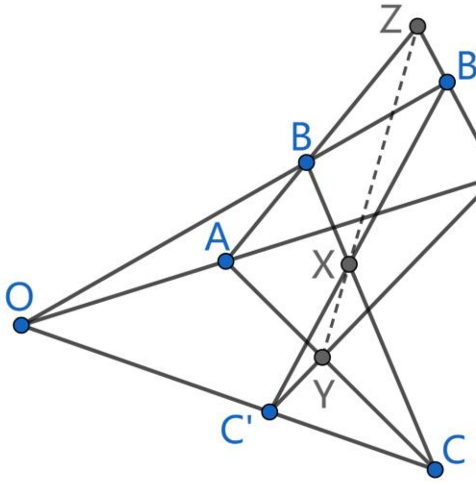
推论 2.（1）设 P 为等腰 $\triangle ABC$ 底边 BC 上任意一点，则 $AP^2 = AB^2 - BP \cdot PC$；

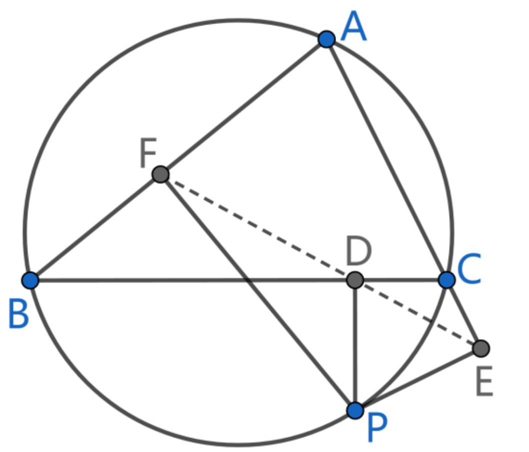
（2）（中线长公式）设 P 为 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的中点，则 $AP^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$。

二、例题精讲

例 1.（笛沙格定理）由点O引出的三条射线上各有两个点，A,A'，B,B'和C,C'。直线BC与$B'C'$交于点X，直线AC与$A'C'$交于点Y，直线AB与$A'B'$交于点Z。求证：X,Y,Z三点共线。

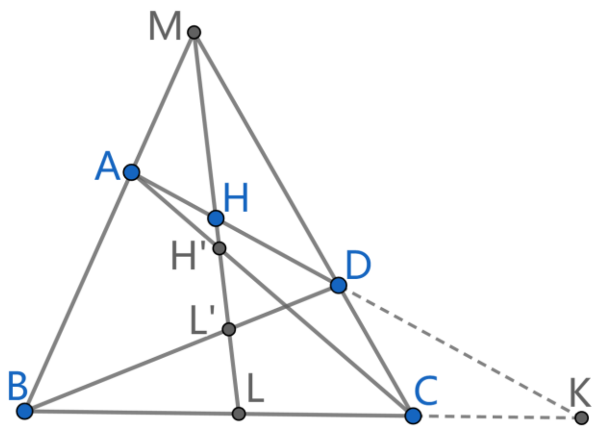
例 2．（西姆松定理）设P是平面上异于$\triangle ABC$三个顶点的任意一点，过P作三边BC,CA,AB的垂线，垂足分别为D,E,F。求证：P在$\triangle ABC$外接圆上当且仅当D,E,F三点共线。

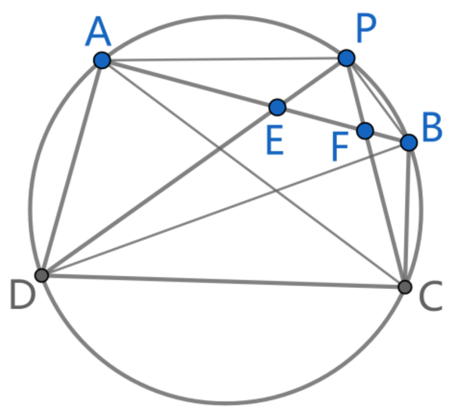




例 3. 凸四边形$ABCD$的一组对边AB与CD所在直线交于点M。过M作直线分别交AD,BC于点H,L，交AC,BD于H',L'。求证：$\frac{1}{MH}+\frac{1}{ML}=\frac{1}{MH'}+\frac{1}{ML'}$。

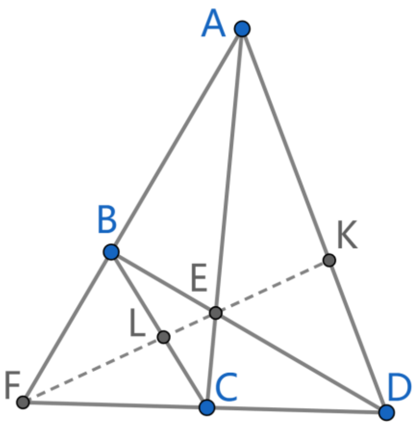
例 4. 如图，已知A,B,C,D,P在圆ω上，E,F在线段AB上，满足$AE=4, EF=2$，$FB=1, CD=8$，求$AD\cdot BC$的值。

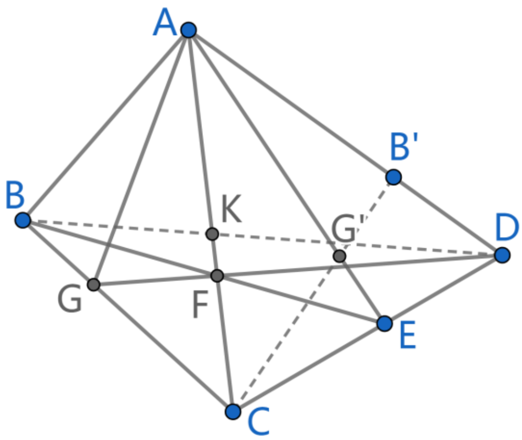




例 5. 在凸四边形$ABCD$中，对角线AC,BD相交于E，直线AB,CD相交于F。求证：$\frac{[ADE]}{[BCE]}=\frac{[ADF]}{[BCF]}$。

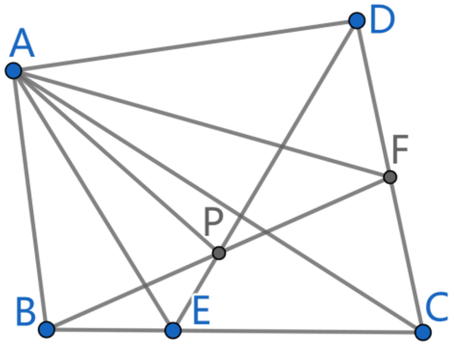
例 6.（1999，高联）在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 平分 $\angle BAD$，在 CD 上取一点 E， BE 与 AC 相交于 F， 延长 DF 交 BC 于点 G 。求证： $\angle GAC=\angle EAC$ 。

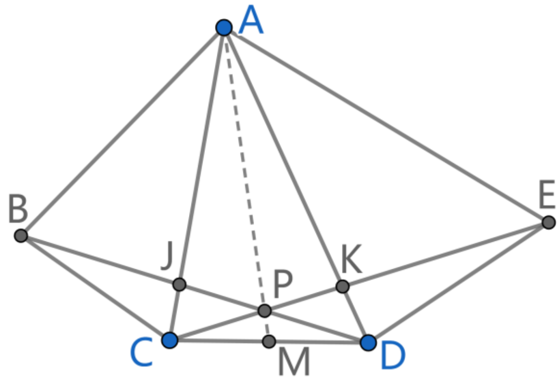




例 7. 设 E,F 分别为四边形 $ABCD$ 的边 BC,CD 上的点， BF 与 DE 交于点 P 。若 $\angle BAE=\angle FAD$，求证： $\angle BAP=\angle CAD$ 。

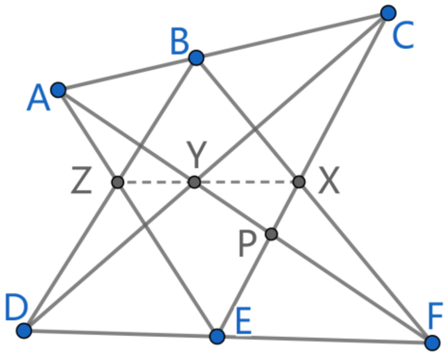
例 8. 凸五边形 $ABCDE$ 满足 $\angle BAC=\angle CAD=\angle DAE$， $\angle ABC=\angle ACD=\angle ADE$， P 是 BD 和 CE 的交点。求证： AP 平分线段 CD 。

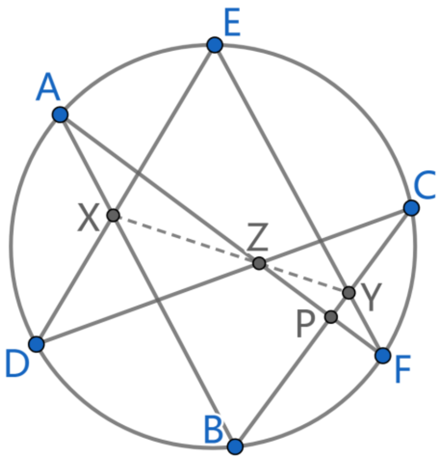


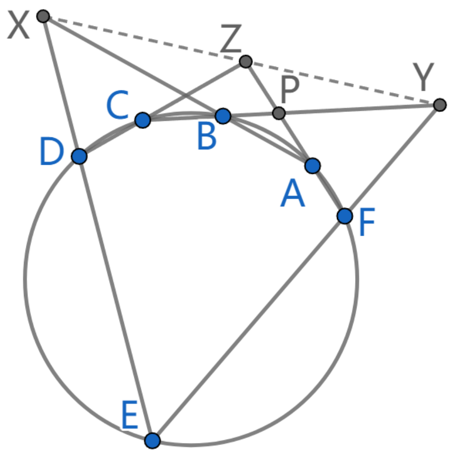


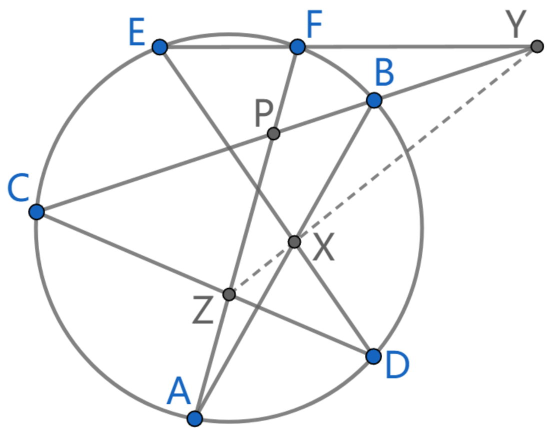
例 9.（帕普斯定理） A,B,C 三点共线， D,E,F 三点共线， BF 与 CE 相交于 X， CD 与 AF 相交于 Y， AE 与 BD 相交于 Z 。求证： X,Y,Z 三点共线。(注：可将插图中的 A,X， B,Y， C,Z 三组标签交换，或将 D,X， E,Y， F,Z 三组标签交换，结论依然成立。)

例 10.（帕斯卡定理） A,B,C,D,E,F 六点共圆， AB 与 DE 相交于 X， BC 与 EF 相交于 Y， CD 与 FA 相交于 Z 。求证： X,Y,Z 三点共线。



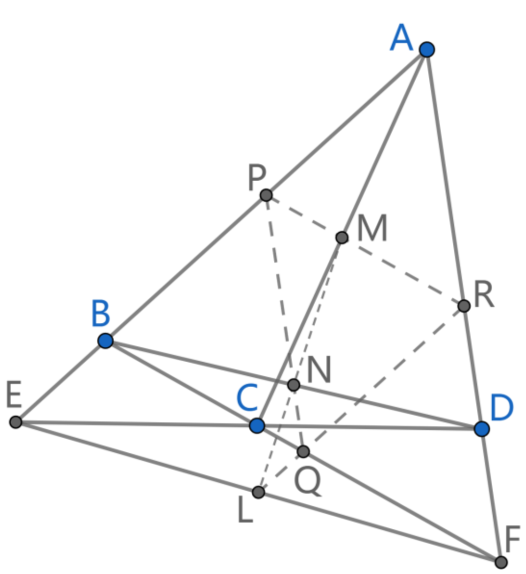


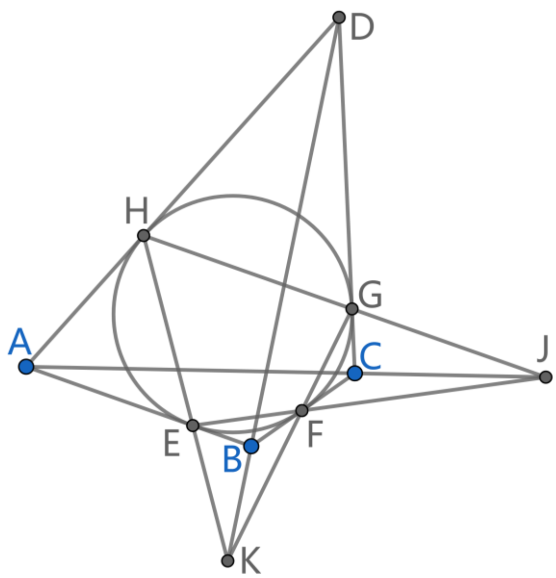




例 11.（牛顿线）在四边形 $ABCD$ 中，直线 AB, CD 相交于 E，直线 AD, BC 相交于 F，线段 EF, AC, BD 的中点分别为 L, M, N。求证：L, M, N 三点共线。

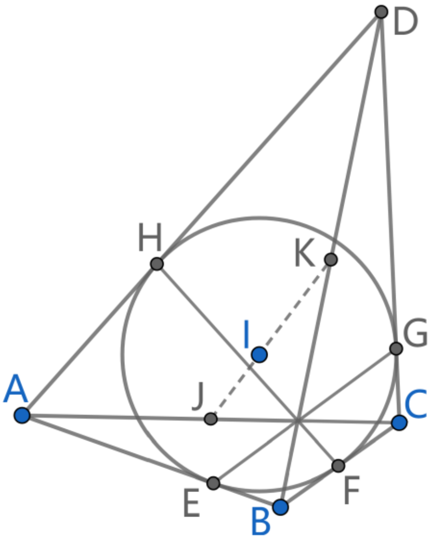
例 12. 设四边形 $ABCD$ 的内切圆分别切 AB, BC, CD, DA 于点 E, F, G, H。求证：EH, BD, FG 三线共点，EF, AC, GH 三线共点。

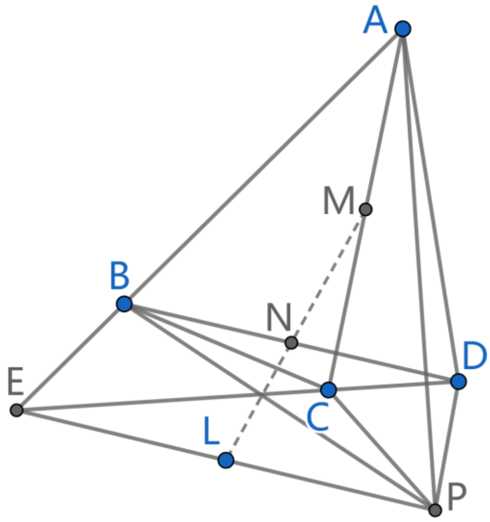




例13.(牛顿定理) 设四边形 $ABCD$ 的内切圆 $\odot I$ 分别切 AB, BC, CD, DA 于点 E, F, G, H 。则有 (1) I 在四边形 $ABCD$ 的牛顿线上; (2) AC, BD, EG, FH 四线共点。

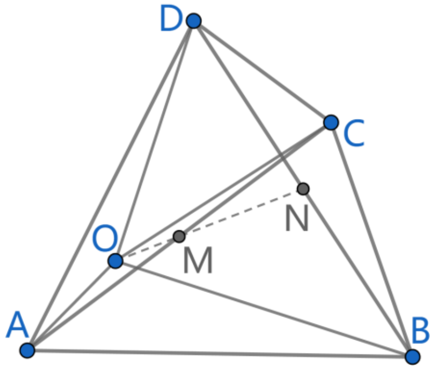
例 14. 如图，已知直线 AB 与 CD 相交于点 E ， $[PAD]=[PBC]$ ，点 L, M, N 分别是 PE, AC, BD 的中点，求证: L, M, N 三点共线。

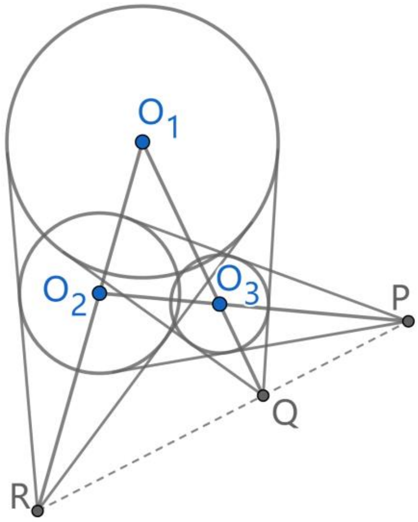




例 15.（Pierre-Léon Anne 定理）设四边形 $ABCD$ 不是平行四边形，则满足 $[AOB]+[COD]=[BOC]+[DOA]$ 的点 O 的轨迹为四边形 $ABCD$ 的牛顿线。上述三角形面积为有向面积。

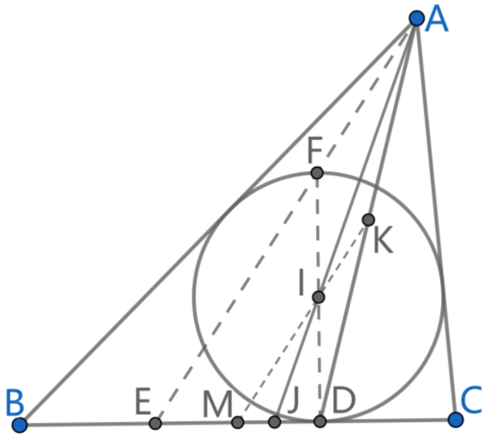
例 16.(蒙日定理) 如图，$\odot O_1, \odot O_2, \odot O_3$ 两两的外公切线分别交于点 P, Q, R 。求证: P, Q, R 三点共线。

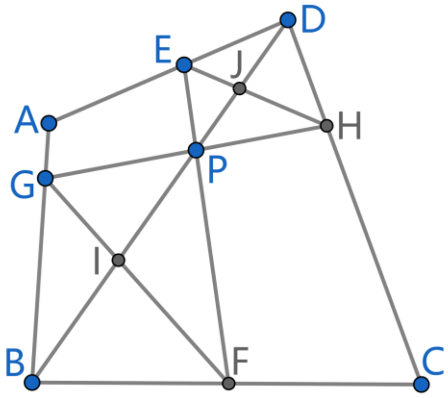




例 17. $\triangle ABC$ 的内切圆 $\odot I$ 与 BC 切于点 D ， M, K 分别为 BC, AD 的中点。求证: M, I, K 三点共线。

例 18. 四边形 $ABCD$ 中， $AB=AD, BC=CD$ 。过 BD 上一点 P 作一条直线分别交 AD,BC 于点 E,F，再过点 P 作一条直线分别交 AB,CD 于点 G,H 。设 GF 与 EH 分别与 BD 交于 I,J 。求证： $\frac{PI}{PB}=\frac{PJ}{PD}$ 。





例 19. 如图，$\angle ABD=30^{\circ}, \angle DBC=40^{\circ}, \angle DCB=20^{\circ}, \angle DCA=50^{\circ}$ 。求 $\angle DAC$ 的大小。

例 20. 如图， $\angle ABD=20^{\circ}, \angle ABC=60^{\circ}, \angle DCB=50^{\circ}, \angle ACD=30^{\circ}$ 。求 $\angle DAB$ 和 $\angle ADC$ 的大小。

例 21. 如图，已知 A,B,P 在圆 ω 上， E,F 在线段 AB 上，满足 $AE=EF=FB$， PE,PF 分别交 ω 于点 D,C 。求证： $EF\cdot CD=AD\cdot BC$ 。