三角形的五心-1

一、知识要点

记号和约定：在题目中出现了$\triangle ABC$时，如果下列字母不与题设条件冲突，我们约定 $a=BC,b=CA,c=AB$， $A=\angle CAB,B=\angle ABC,C=\angle BCA$， $p=\dfrac{a+b+c}{2}$， R,r分别为$\triangle ABC$外接圆、内切圆的半径。

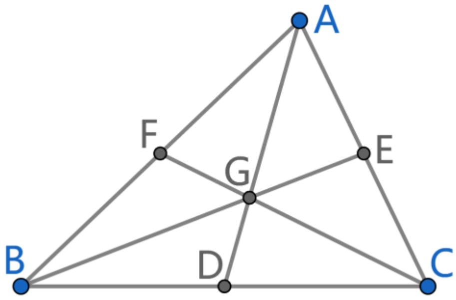
定义 1. 三角形的三条中线交于一点，即三角形的重心。

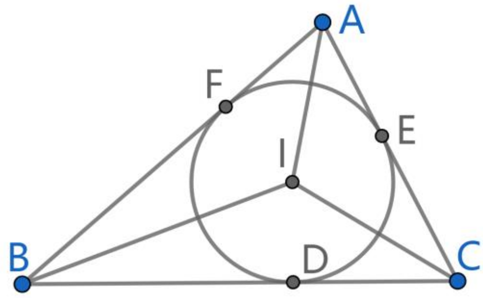
性质 1. 设G为$\triangle ABC$的重心，D,E,F分别为三边BC,CA,AB的中点，则G把三条中线分为长度比为 2 的两段，$\dfrac{AG}{GD}=\dfrac{BG}{GE}=\dfrac{CG}{GF}=2$。设$P$为平面上任意一点，则 $\overrightarrow{PG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$， $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$。

定义 2. 三角形的三条内角平分线交于一点，即三角形的内心。

性质 2. 设I为$\triangle ABC$的内心，$\odot I$与BC,CA,AB的切点分别为D,E,F，则

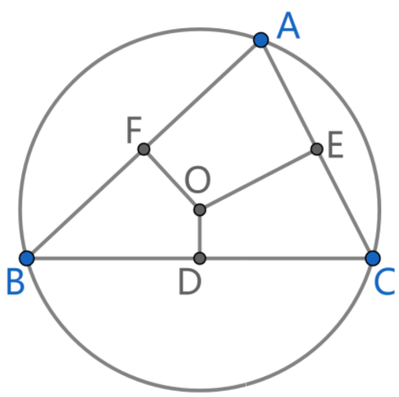
$AE=AF=p-a$， $BD=BF=p-b$， $CD=CE=p-c$。

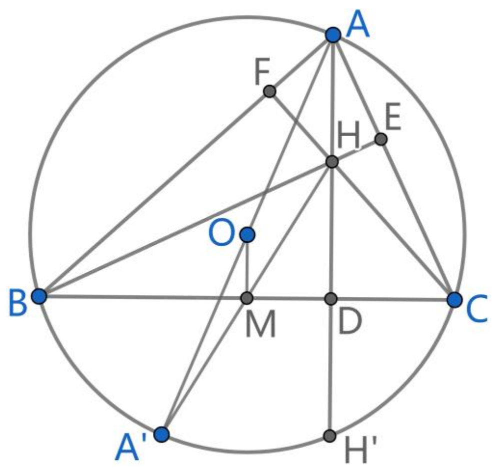




定义 3. 三角形三边的中垂线交于一点，即三角形的外心。

定义 4. 三角形的三条高交于一点，即三角形的垂心。





性质 3. 设O为$\triangle ABC$的外心，H为$\triangle ABC$的垂心，我们有：（1）$\angle BHC=\pi-A$；（2）$\triangle HBC,\triangle HCA,\triangle HAB,\triangle ABC$的外接圆半径都相等；（3）设$M$为$BC$的中点，则 $AH=2OM=2R\cos A$，同理，$BH=2R\cos B$，$CH=2R\cos C$；（4）H关于M的对称点是$\odot O$中A的对径点，关于BC的对称点在$\odot O$上；（5）$\angle BAO=\angle CAH$，

$\angle CBO=\angle ABH$， $\angle ACO=\angle BCH$，即 O,H 关于 $\triangle ABC$ 互为等角共轭点。

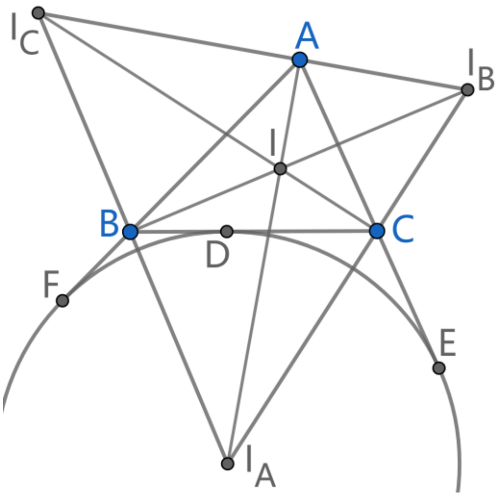
定义 5. 三角形每个顶点（设为 P ）处的内角平分线和另外两角的外角平分线交于一点，即三角形（顶点 P 所对）的旁心。

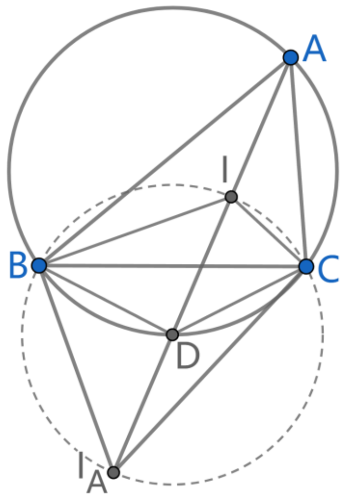
性质 4. 设 I_A 为 $\triangle ABC$ 点 A 所对的旁心， $\odot I$ 与直线 BC,CA,AB 的切点分别为 D,E,F，

则 $AE=AF=p$， $BD=BF=p-c$， $CD=CE=p-b$。

定理 1.（鸡爪定理）设 I 为 $\triangle ABC$ 内心，I_A 为点 A 所对的旁心，$\angle BAC$ 的平分线交 $\triangle ABC$

的外接圆于 D，则 $DB=DC=DI=DI_A=2R\sin\dfrac{A}{2}$。





定理 2. 在 $\triangle ABC$ 中，设 r_A,r_B,r_C 分别为 A,B,C 所对的旁切圆的半径，我们有：

$r=4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$， $p=4R\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$， $p-a=4R\cos\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$，

$p-b=4R\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$， $p-c=4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$， $r_A=4R\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$，

$r_B=4R\cos\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$， $r_C=4R\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$。

性质 5. 三角形的内心和三个旁心构成垂心四点组。

二、例题精讲

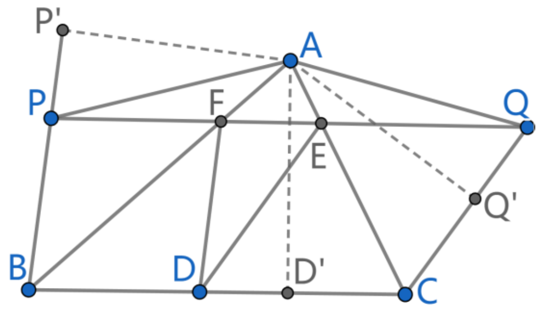
例 1. 分别证明三角形的三条中线，三条内角平分线，三边的中垂线，三条高，以及每个内角的平分线和另外两角的外角平分线，都交于一点。

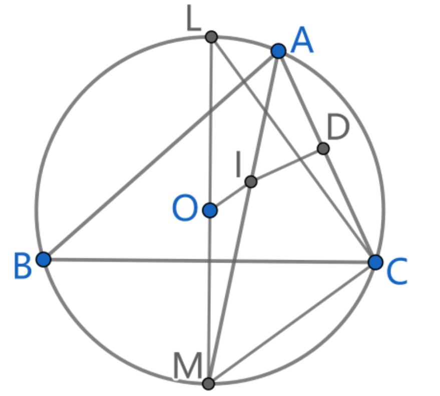
例 2.（1）三角形的外心是它三条边中点构成的三角形的垂心；（2）三角形的垂心是它三条高的垂足构成的三角形的内心；(3) 三角形的内心是它三个旁心构成的三角形的垂心；(4) 三角形的三个顶点是（2）问中它的垂足三角形的三个旁心。

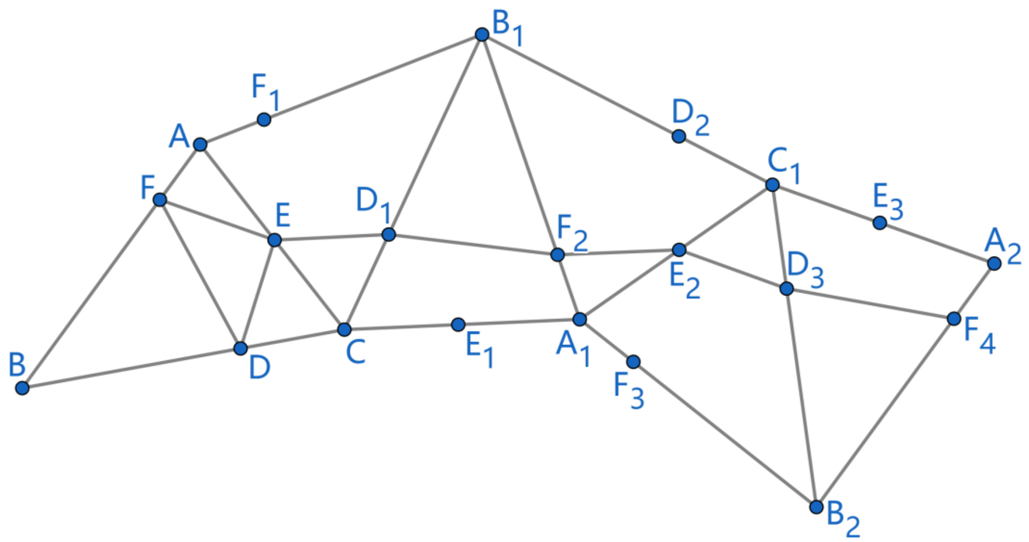
例 3.（法尼亚诺问题）给定锐角 $\triangle ABC$，求其内接三角形（$\triangle DEF$，满足 D,E,F 分别在

BC,CA,AB 上）中周长最小者。

例 4.（欧拉定理）设 O, I 分别为 $\triangle ABC$ 的外心和内心，则 $OI^2 = R^2 - 2Rr$ 。

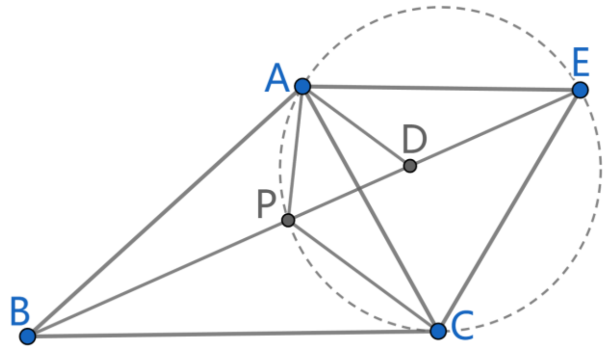


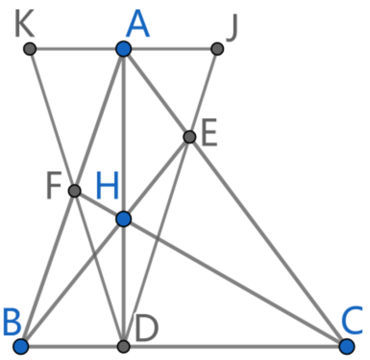




例 5.（费马问题）给定 $\triangle ABC$ 在平面上求一点 P，使得 $PA+PB+PC$ 取最小值。满足条件的点 P 称为 $\triangle ABC$ 的费马点。

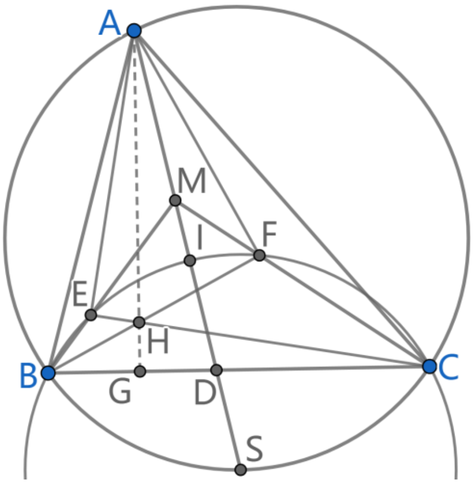
例 6. 锐角 $\triangle ABC$ 中，AD 是边 BC 上的高，H 是 AD 上的一点，BH, CH 分别交 AC, AB 于点 E, F 。求证：$\angle EDH = \angle FDH$ 。

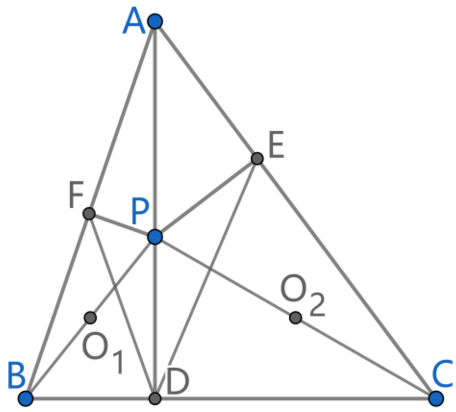




例 7.（2023，高联预赛贵州）在 $\triangle ABC$ 中，I 是内心，AI 交 BC 于点 D，AD 中点为 M，MB, MC 与 $\triangle BIC$ 外接圆的第二个交点分别是 E, F 。求证：（1）$AE \perp EC$，$AF \perp FB$；（2）若 BF 交 CE 于点 H，则 $AH \perp BC$ 。

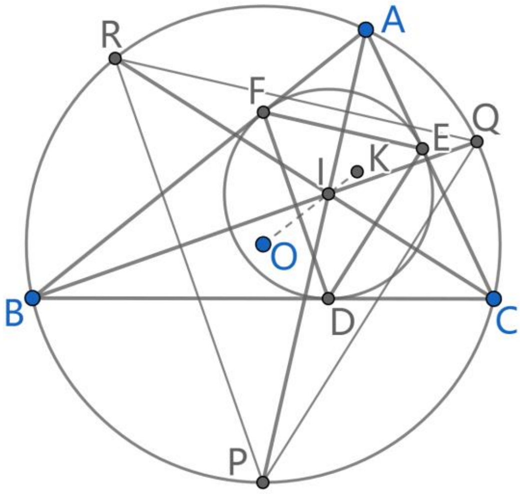
例 8.（2007，高联）在锐角$\triangle ABC$中，$AB<AC$，AD是边BC上的高，P是线段AD内一点。过P作$PE\perp AC$，垂足为E，作$PF\perp AB$，垂足为F。O_1,O_2分别是$\triangle BDF,\triangle CDE$的外心。求证：$O_1,O_2,E,F$四点共圆当且仅当$P$是$\triangle ABC$的垂心。

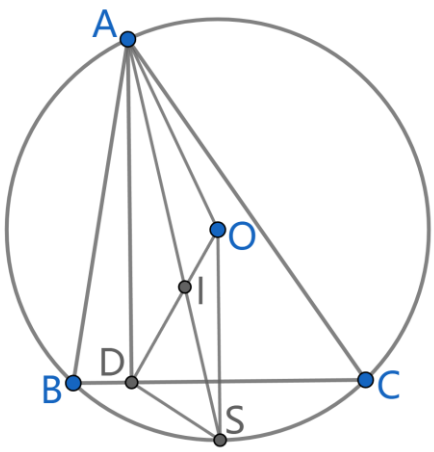




例 9. 点O是$\triangle ABC$的外心，$\triangle ABC$的内切圆$\odot I$与BC,CA,AB分别相切于D,E,F，点K为$\triangle DEF$的垂心。设$\triangle ABC$的外接圆和内切圆的半径分别为R和r。求证：O,I,K三点共线，且$\dfrac{KI}{IO}=\dfrac{r}{R}$。

例 10.（1998，高联）设O,I分别为$\triangle ABC$的外心和内心，AD是BC边上的高，I在线段OD上。求证：$\triangle ABC$的外接圆半径等于点A所对的旁切圆半径。

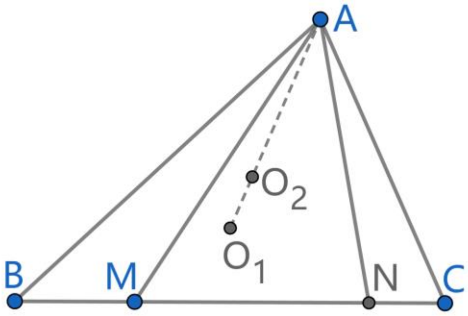


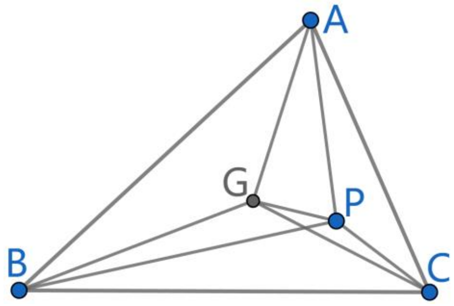


例 11.（2012，高联 A 卷）在锐角$\triangle ABC$中，$AB>AC$，M,N是BC边上两个不同的点，使得$\angle BAM=\angle CAN$。设$\triangle ABC$和$\triangle AMN$的外心分别为O_1,O_2。求证：O_1,O_2,A三点共线。

例 12. 任给一$\triangle ABC$，P 为平面上任意一点。求证：$PA^2+PB^2+PC^2 \ge \dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$，等号成立当且仅当 P 为$\triangle ABC$ 重心 G 。事实上，我们有下列恒等式：

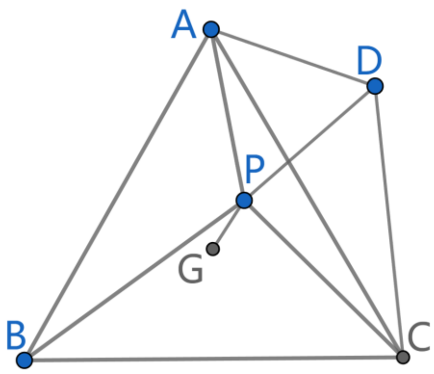
$PA^2+PB^2+PC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3PG^2$ 。

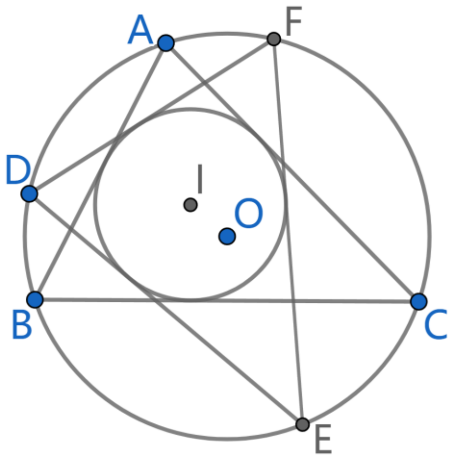




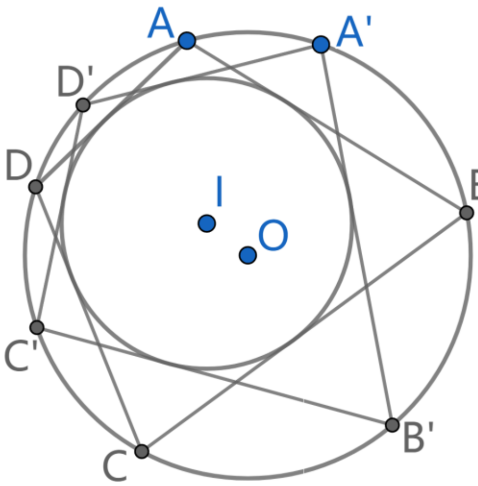
例 13.（2021，高联预赛北京）G 为正$\triangle ABC$ 的重心，P 为三角形内任意一点。记 $AB=a, GP=d$，又以 PA,PB,PC 为边的三角形面积为 S 。求证：$S=\dfrac{\sqrt{3}}{12}(a^2-3d^2)$ 。

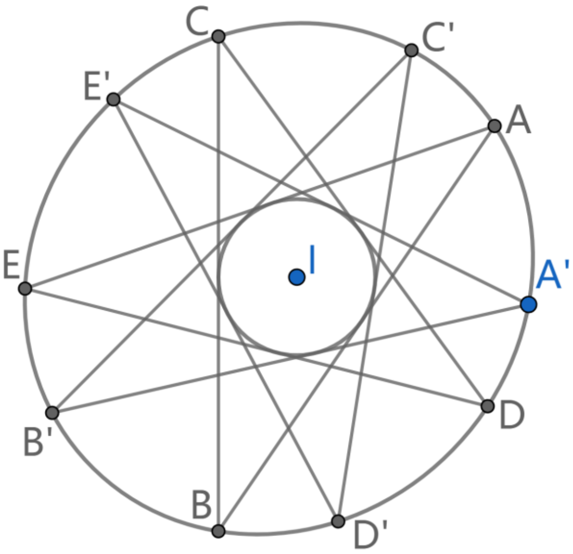
例 14.（2009，东南数学奥林匹克；彭赛列闭合定理的特殊情形）任给$\triangle ABC$，设它的外接圆和内切圆分别为$\odot O, \odot I$，D,E,F 是$\odot O$ 上的三个不同的点，满足 DE,DF 都与$\odot I$ 相切。求证：EF 也和$\odot I$ 相切。



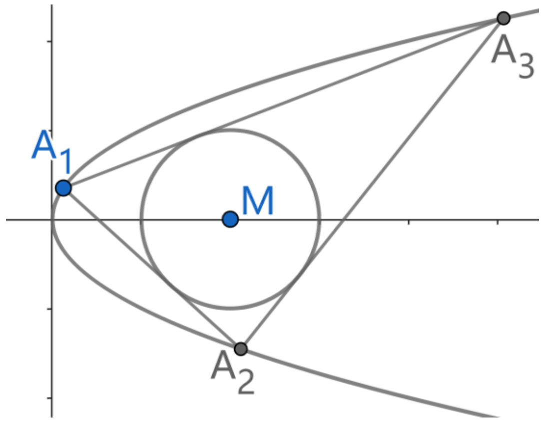


注：称一个 n 边形为彭赛列闭合 n 边形，若它的各顶点均在一条圆锥曲线 Ω 上,且各边均与另一条圆锥曲线 Γ 相切。彭赛列闭合定理的完整叙述如下：对平面上给定的两条圆锥曲线 Ω, Γ，若它们之间存在一个彭赛列闭合 n 边形，则对 Ω 上任意一点 A'，存在一个以 A' 为顶点的彭赛列闭合 n 边形，这里允许某些顶点在射影平面的无穷远直线上。





例 15.（2021，高考全国甲卷）抛物线C的顶点为坐标原点O，焦点在x轴上。直线$l:x=1$交C于P,Q两点，且$OP\perp OQ$。已知点$M(2,0)$，且$\odot M$与l相切。(1) 求$C,\odot M$的方程；(2) 设A_1,A_2,A_3是C上的三个点，直线A_1A_2,A_1A_3均与$\odot M$相切。判断直线A_2A_3与$\odot M$的位置关系，并说明理由。



例 16.（2009，江西高考文）已知圆$G:(x-2)^2+y^2=r^2$是椭圆$\dfrac{x^2}{16}+y^2=1$的内接$\triangle ABC$的内切圆，其中A为椭圆的左顶点。(1) 求圆G的半径r；(2) 过点$M(0,1)$作圆G的两条切线交椭圆于E,F两点，求证：直线EF与圆G相切。