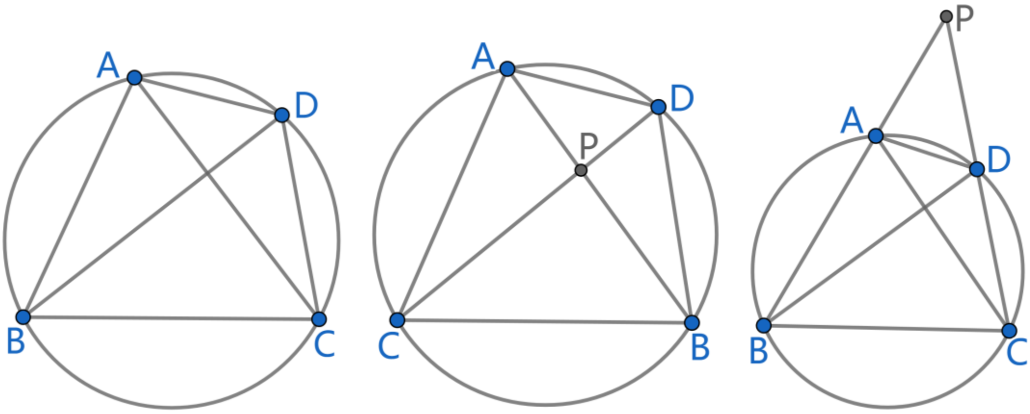
圆的性质-1

一、知识要点

记号和约定：设 $\mathrm{Pow}(P,\omega)=OP^2-R^2$ 为点 P 对圆 ω 的幂，其中 O,R 分别为 ω 的圆心和半径。设 $\odot(ABC)$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆。

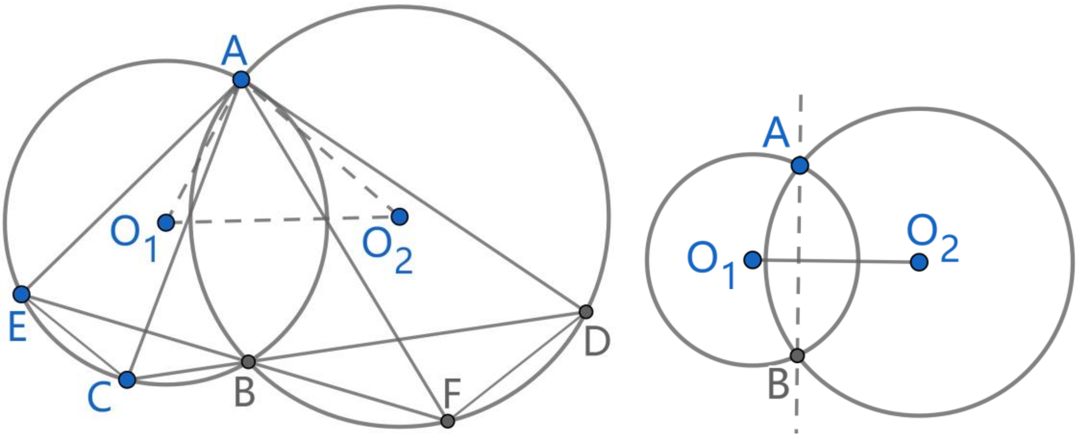
性质 1.（四点共圆的等价条件）如图，$ABCD$ 四点共圆等价于下列六个条件中的任意一个：$\angle BAC=\angle BDC$，$\angle ABD=\angle ACD$，$\angle ADB=\angle ACB$，$\angle DAC=\angle DBC$，$\angle ABC=\pi-\angle ADC$，$\angle BAD=\pi-\angle BCD$。它们可以划分成三组：第 1、2 个，第 3、4 个，第 5、6 个。每组的两个条件等价是平凡的，不同组之间的条件等价不平凡，需要使用 $ABCD$ 四点共圆来推导。

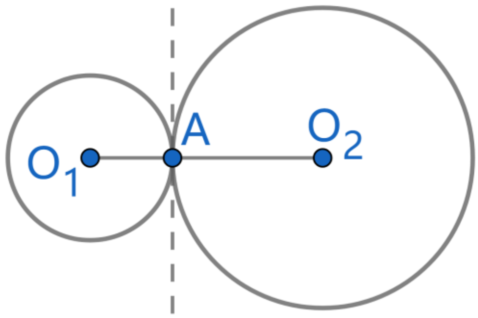


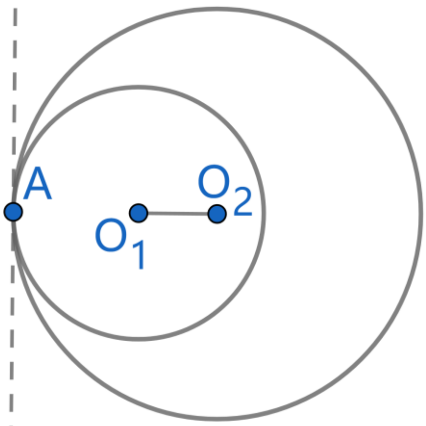
定理 1.（圆幂定理）(1) 相交弦定理，切割线定理，割线定理可以统一表述为：过平面任意一点 P 任作一直线与圆 ω 交于点 A,B，则 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\mathrm{Pow}(P,\omega)$，上式左边为线段的有向长度之积；(2) 上述命题的逆命题也成立：设直线 AB 与直线 CD 交于点 P，且 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$，则 A,B,C,D 四点共圆。

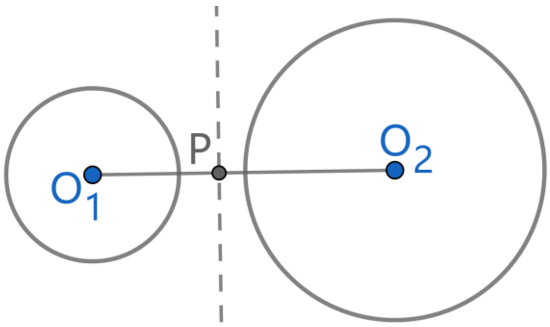
性质 2. 设两圆 $\odot O_1,\odot O_2$ 相交于 A,B 两点，过 B 点作一直线分别交两圆于 C,D，作另一直线分别交两圆于 E,F，则 $\triangle ACD\backsim\triangle AEF\backsim\triangle AO_1O_2$，$\triangle AEC\backsim\triangle AFD$。

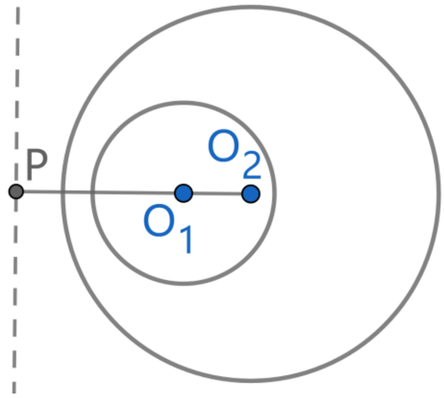
定理 2.（根轴定理）若两圆圆心不重合，则到这两个圆的幂相等的点的轨迹是一条直线，称为这两圆的根轴。两圆的根轴垂直于两圆的连心线。当两圆相交时，它们的根轴为两圆公共弦所在直线。当两圆相切时，它们的根轴是过切点的公切线。





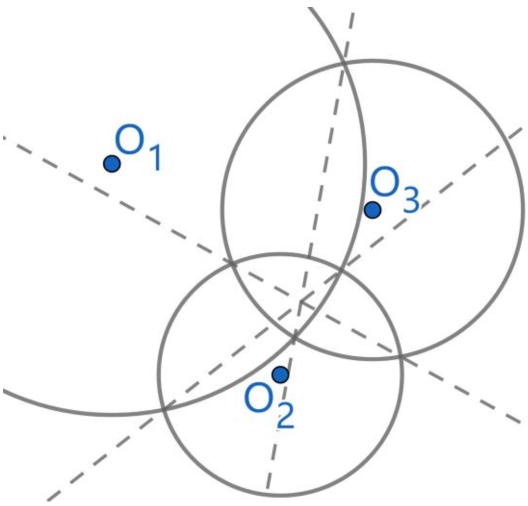


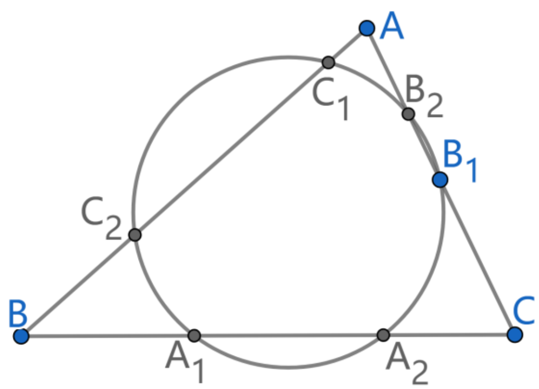




定理 3.（根心定理）对平面上任意三个非同心的圆，它们两两之间的根轴共三条直线要么重合，要么平行，要么交于一点。

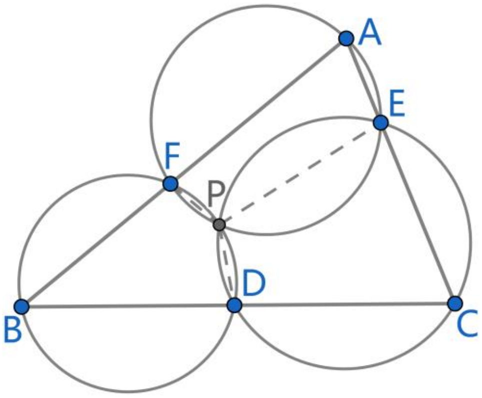
推论 1.（Davis 引理）在$\triangle ABC$中，A_1,A_2在BC上，B_1,B_2在CA上，C_1,C_2在AB上，且满足A_1,A_2,B_1,B_2四点共圆，A_1,A_2,C_1,C_2四点共圆，B_1,B_2,C_1,C_2四点共圆。则A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2六点共圆。

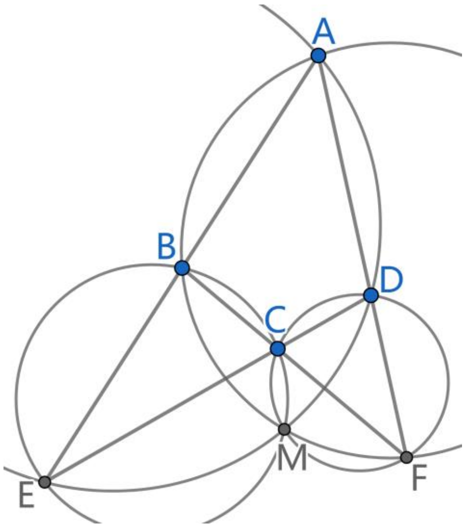




定理 4.（三角形的密克定理）$\triangle ABC$中，D,E,F分别在直线BC,CA,AB上，则$\odot(AEF)$，$\odot(BFD),\odot(CDE)$交于一点P，称为$\triangle ABC$（中关于点D,E,F）的密克点。

定理 5.（四边形的密克定理）四边形 $ABCD$ 中， AB 交 CD 于点 E ， AD 交 BC 于点 F ，则 $\odot(ABE), \odot(CDE), \odot(ADF), \odot(BCF)$ 交于一点 M ，称为四边形 $ABCD$ 的密克点。事实上，此时 M 为 $\triangle ABF$ 中关于点 C, D, E 的密克点。



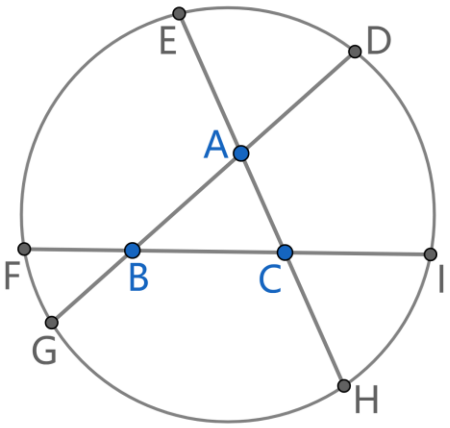


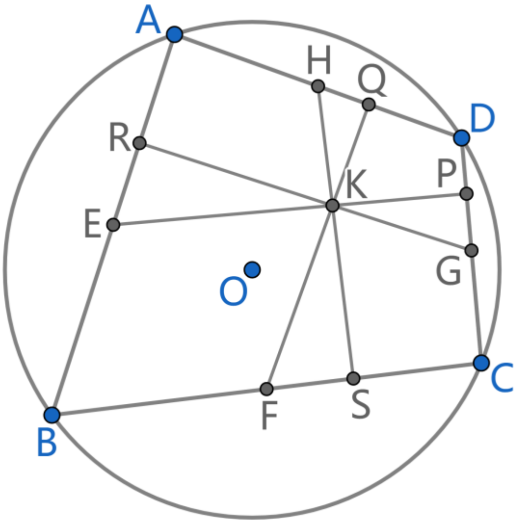
性质 3. A, B, C, D 四点共圆当且仅当 M 在 EF 上。

二、例题精讲

例 1.（Conway 圆）如图，点 D, E, F, G, H, I 分别在 $\triangle ABC$ 三边延长线上，且 $AD = AE = BC$ ， $BF = BG = AC$ ， $CH = CI = AB$ 。求证： D, E, F, G, H, I 六点共圆。

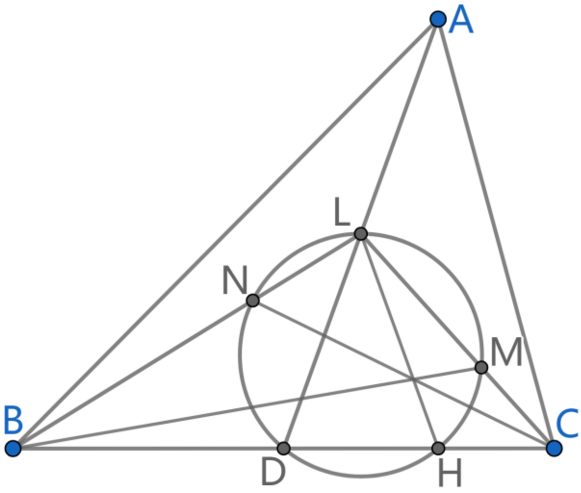
例 2. 过圆内接四边形各边中点作对边垂线，则四条垂线交于一点。

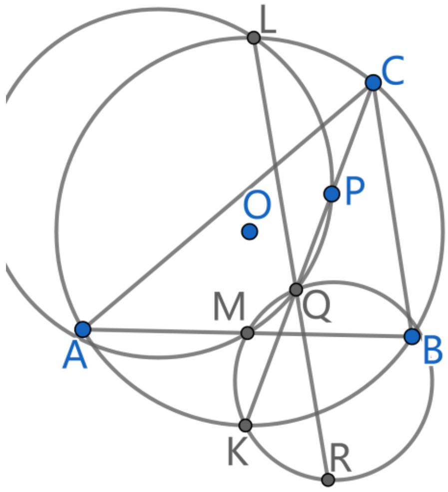




例 3. AH 为 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的高， D 为 BC 的中点， L 为 AD 的中点， $\odot(DLH)$ 与 BL, CL 分别交于点 N 和 M 。求证： LH, BM, CN 交于一点。

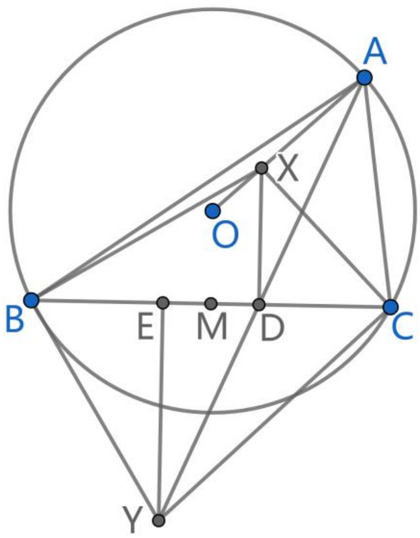
例 4. $\triangle ABC$ 外接圆为 $\odot O$， M 为 AB 中点，$\odot O$ 的直径 KL 垂直于 AB。一个过 M,L 的圆与 KC 交于 P,Q （P 更靠近 C）。$\triangle KMQ$ 的外接圆与 LQ 的延长线交于点 R。求证：A,B,P,R 四点共圆。

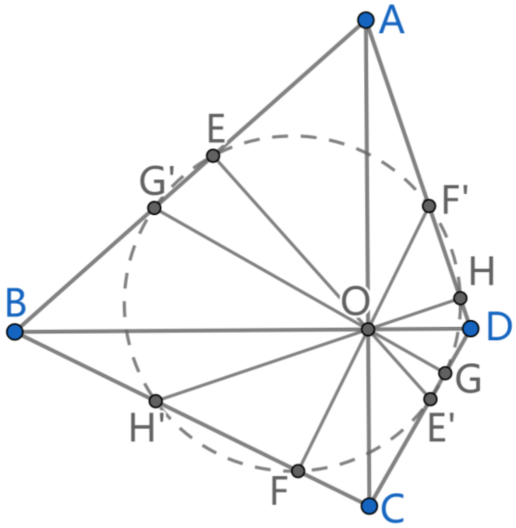




例 5. $\triangle ABC$ 中，$AB \neq AC$，O 为它的外心，$\angle BAC$ 的平分线与 BC 交于点 D，点 E 与点 D 关于 BC 中点 M 对称。过 D,E 分别作 BC 的垂线，与 AO,AD 分别交于点 X,Y。求证：B,X,C,Y 四点共圆。

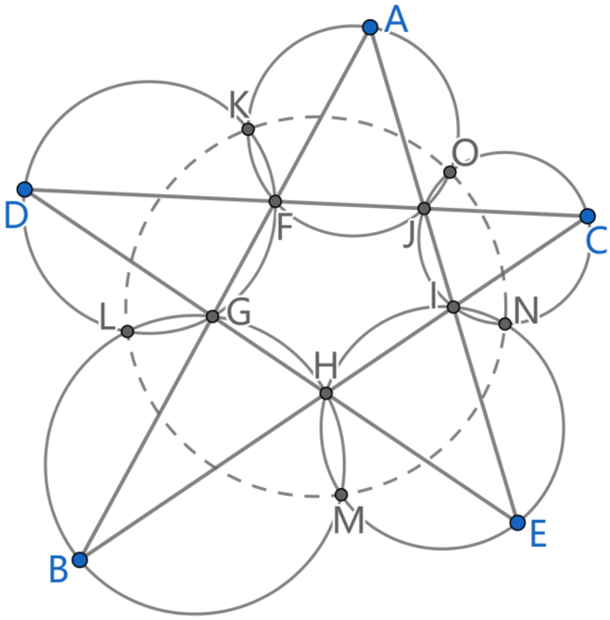
例 6.（八点圆定理）如图，$AC \perp BD$ 于 O，过 O 作四边形 $ABCD$ 各边的垂线分别交各组对边于点 E,E'，F,F'，G,G'，H,H'。求证：上述八点共圆。

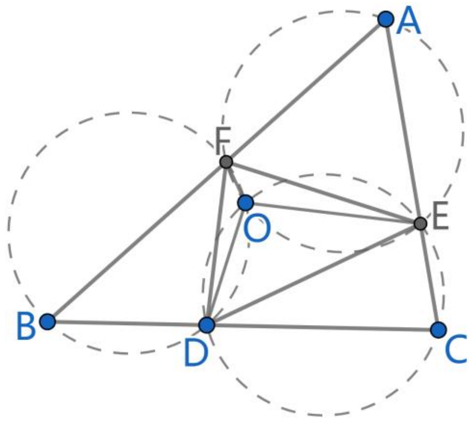




例 7.（江泽民定理）任意一个五角星，每个角上交出一个小三角形，作出五个三角形的外接圆，考察相邻两圆除去边上交点之外的另一个交点，共五个点。求证：这五点共圆。

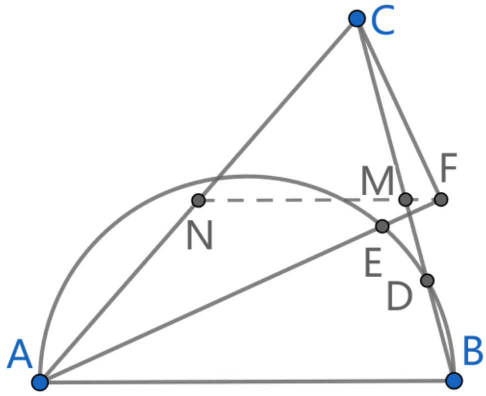
例 8. 若 $\triangle ABC$ 中 D,E,F 分别在 BC,CA,AB 上，且 $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$。求证：$BC \leq 2EF$。

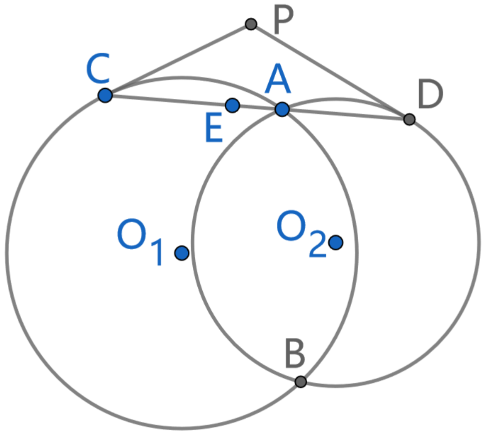




例 9. 以$\triangle ABC$的边AB为直径作圆，交BC于D，交$\angle BAC$的平分线于E。过C作直线AE的垂线，垂足为F，点M是BC的中点。求证：D,E,F,M四点共圆。

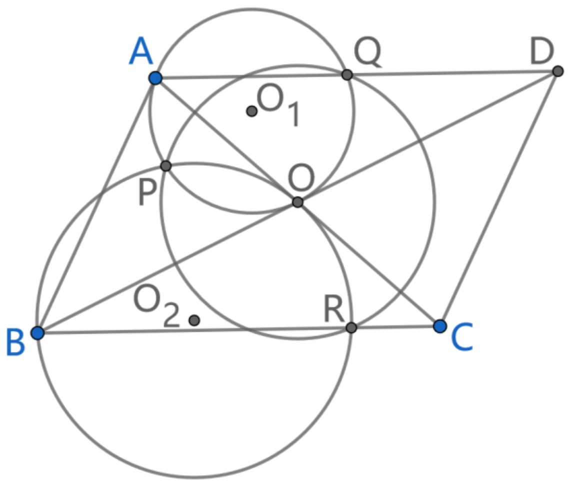
例 10. $\odot O_1$与$\odot O_2$相交于A,B两点，过A作任一直线分别再交$\odot O_1,\odot O_2$于C和D，过C作$\odot O_1$的切线，过D作$\odot O_2$的切线，两切线相交于P。点E在线段CD上，$AC=DE$。求证：$\angle CPB=\angle DPE$。

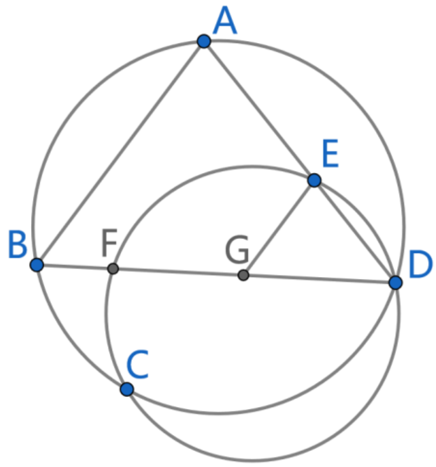




例 11. $▱ABCD$的对角线相交于O，圆c_1经过点A和O，且与BD相切，圆c_2经过点B和O，且与AC相切，c_1与c_2相交于O和P，c_1交AD于A和Q，c_2交BC于B和R。求证：点O是$\triangle PQR$的外心。

例 12. A,B,C,D四点共圆，过C和D作任一圆分别交直线AD,BD于E,F（均不与D重合），过E作AB的平行线交直线BD于G。求证：$\dfrac{BF}{FG}=\dfrac{BC}{CD}\cdot\dfrac{AD}{AB}$。





例 13. $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于 P 和 Q，直线 AB 与 $\odot O_1$ 相切于 A，与 $\odot O_2$ 相切于 B。过 P 作 $\odot O_1$ 的切线交 $\odot O_2$ 于 C，直线 AP 与 BC 相交于 R。求证：直线 BP, BR 均与 $\triangle PQR$ 的外接圆相切。

例 14. 给定 $\triangle ABC$，M 是边 BC 上的动点，线段 BM 的中垂线与直线 AB 相交于 P，线段 CM 的中垂线与直线 AC 相交于 Q。求证：$\odot(APQ)$ 经过一个异于 A 的定点。