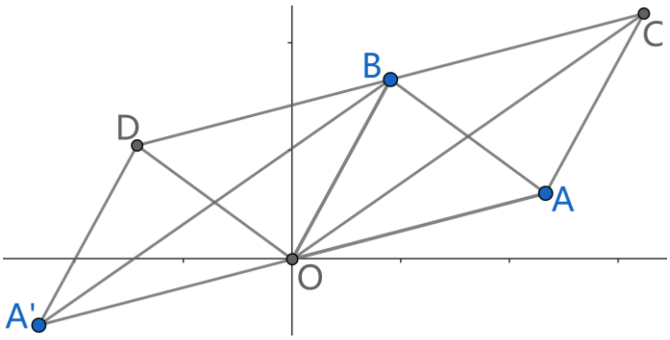
向量法入门

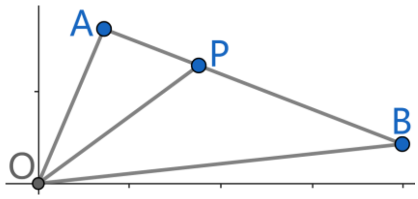
一、知识要点

记号和约定：设 $P$ 为平面上一点，在不产生混淆的情况下，约定 $P=\vec{P}=\overrightarrow{OP}$，其中 $O$ 为选好的或任取的原点。

向量法的基础知识：（1）向量的基本运算：加法，减法，数乘；下图中，$A'=-A$，$C=A+B$，$D=A'+B=B-A=\overrightarrow{AB}$。

（2）定比分点：$A,B$ 两点不重合，则有：(i)点 $P$ 在线段 $AB$ 上当且仅当存在 $\lambda,\mu\geq 0,\lambda+\mu=1$，使得 $P=\lambda A+\mu B$，此时 $\lambda=\dfrac{PB}{AB},\mu=\dfrac{AP}{AB}$；(ii)点 $P$ 在直线 $AB$ 上当且仅当存在 $\lambda,\mu\in\mathbb{R},\lambda+\mu=1$，使得 $P=\lambda A+\mu B$。

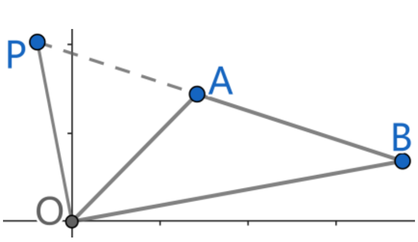


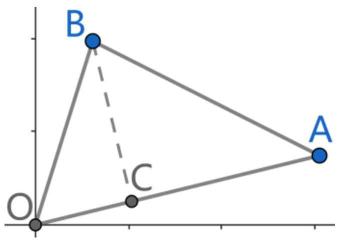




（3）平面向量的点乘和叉乘：设 $O(0,0),A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),\alpha=\angle AOB$ 为沿逆时针方向的有向角，$[OAB]$ 为有向面积，它的符号由 $O,A,B$ 三点的定向决定。设 $r_1=|OA|$，$r_2=|OB|,x_1=r_1\cos\theta_1,y_1=r_1\sin\theta_1,x_2=r_2\cos\theta_2,y_2=r_2\sin\theta_2$，那么 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的点乘和叉乘的定义由下列等式给出：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|OA|\cdot|OB|\cos\alpha=r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)$

$=r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)=x_1x_2+y_1y_2$，$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=|OA|\cdot|OB|\sin\alpha$

$=r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1)=r_1r_2(\cos\theta_1\sin\theta_2-\cos\theta_2\sin\theta_1)=x_1y_2-x_2y_1=2[OAB]$。



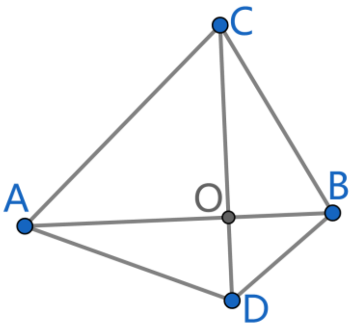

（4）点乘和叉乘都是双线性函数，点乘是交换的，叉乘是反交换的。也就是说，设 $\lambda,\mu\in\mathbb{R},\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\in\mathbb{R}^2$，则有 $(\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}+\mu\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$，

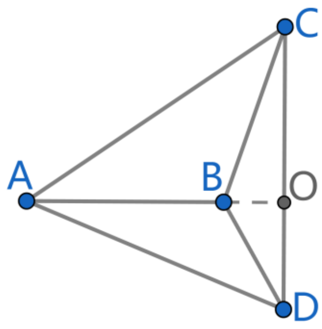
$\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta}+\mu\vec{\gamma})=\lambda\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\mu\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$，$(\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta})\times\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}\times\vec{\gamma}+\mu\vec{\beta}\times\vec{\gamma}$，

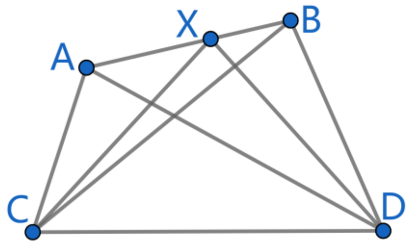
$\vec{\alpha}\times(\lambda\vec{\beta}+\mu\vec{\gamma})=\lambda\vec{\alpha}\times\vec{\beta}+\mu\vec{\alpha}\times\vec{\gamma}$，$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$，$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=-\vec{\beta}\times\vec{\alpha}$，$\vec{\alpha}\times\vec{\alpha}=0$。

（5）点乘和叉乘还有下列重要的几何意义：$\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}=|\vec{\alpha}|^2$；$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$当且仅当$\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$；$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=0$当且仅当$\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$。特别地，$O,A,B$三点共线当且仅当$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=2[OAB]=0$。

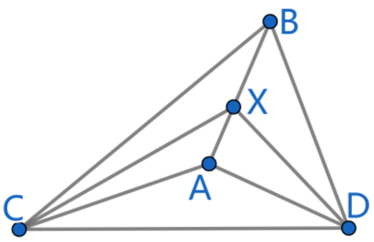
定理 1.（定差幂线定理）$A,B,C,D$是平面上（或空间中）的四个点，则$AB\perp CD$当且仅当$AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$。

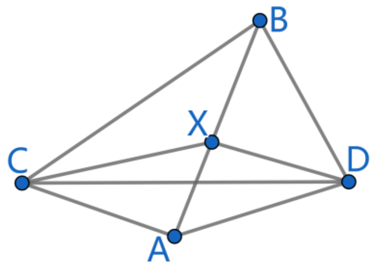


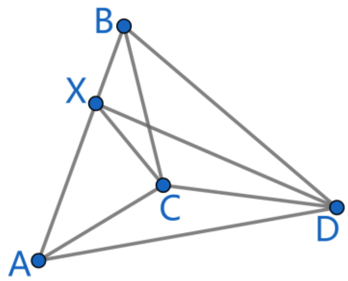





定理 2.（面积形式的定比分点定理）在平面上任给四点$A,B,C,D$，其中无三点共线。在线段$AB$上任取一点$X$，满足$X=\lambda A+\mu B$，$\lambda,\mu\geq 0,\lambda+\mu=1$，我们有：（1）若点$A,X,B$均在直线$CD$的同侧，则$[XCD]=\lambda[ACD]+\mu[BCD]$；（2）若点$A$与点$X$在直线$CD$的异侧，则$[XCD]=-\lambda[ACD]+\mu[BCD]$。



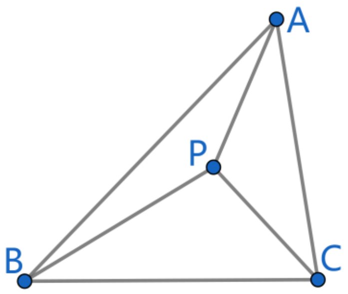


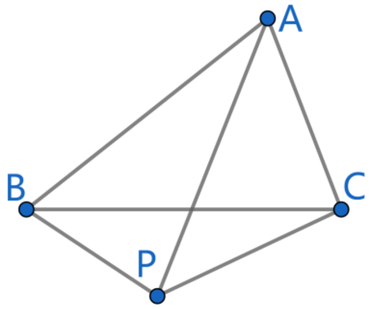


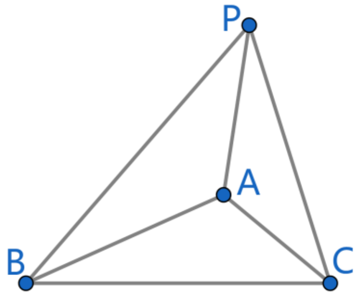

定义 1. 平面上一点$P$关于$\triangle ABC$的重心坐标为$P=(x,y,z)$，其中$x,y,z$满足

$x=\dfrac{[PBC]}{[ABC]},y=\dfrac{[PCA]}{[BCA]},z=\dfrac{[PAB]}{[CAB]}$，$x+y+z=1$，且对平面上任意一点$O$，都有

$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，这里使用三角形的有向面积，$\dfrac{[PBC]}{[ABC]}>0$当且仅当点$P,A$在直线$BC$的同侧。



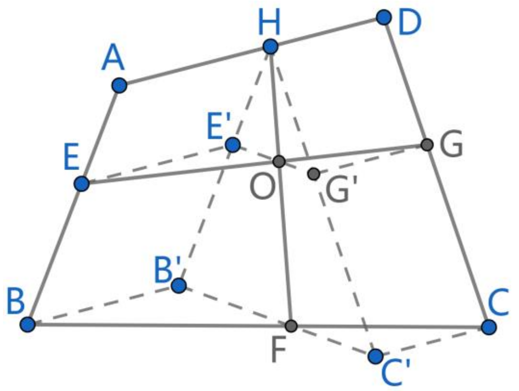



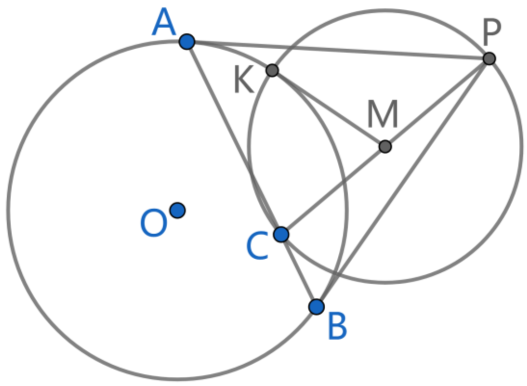

二、例题精讲

例 1. 任意给定两个正数 $a,b$，在凸四边形 $ABCD$ 各边上分别取一点 $E,F,G,H$，使得

$\frac{AE}{EB}=\frac{DG}{GC}=a$，$\frac{AH}{HD}=\frac{BF}{FC}=b$，$EG$ 交 $HF$ 于 $O$。求证：$\frac{HO}{OF}=a$，$\frac{EO}{OG}=b$。

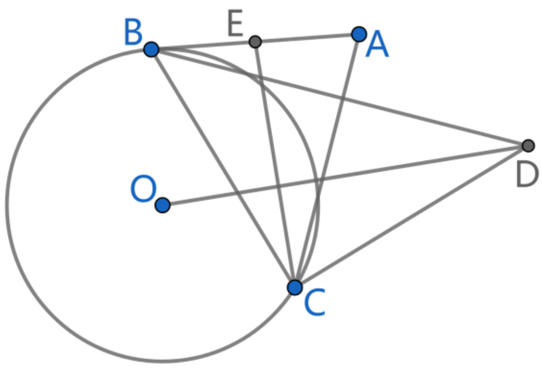
例 2. 过 $\odot O$ 外一点 $P$ 作 $\odot O$ 的两条切线 $PA,PB$，切点分别为 $A,B$。点 $C$ 是直线 $AB$ 上一点，$M$ 是 $PC$ 的中点，以 $PC$ 为直径作圆与 $\odot O$ 的一个交点为 $K$。求证：$MK\perp OK$。

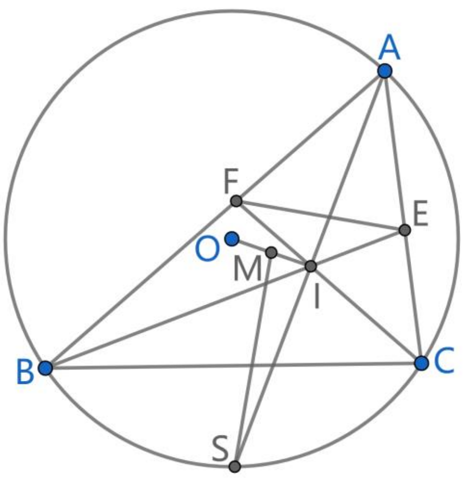



例 3. 直线 $AB$ 与 $\odot O$ 相切于 $B$，点 $C$ 在 $\odot O$ 上，$BC\perp CD$，$AC\perp BD$，点 $E$ 在线段 $AB$ 上，$CE\perp OD$。求证：$AE=BE$。

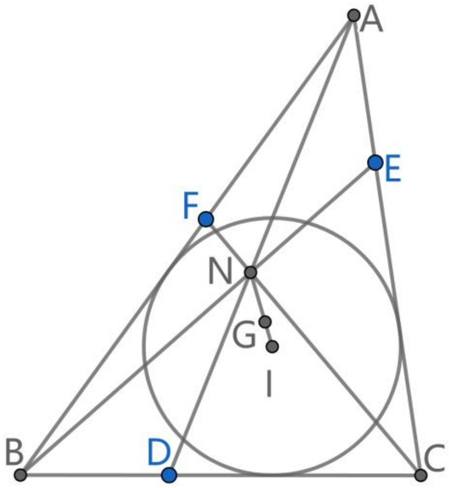
例 4. $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，点 $I$ 是 $\triangle ABC$ 的内心，$BI,AC$ 相交于 $E$，$CI,AB$ 相交于 $F$，$AI$ 延长线交 $\odot O$ 于 $S$，点 $M$ 是 $IO$ 的中点。求证：$SM\perp EF$。

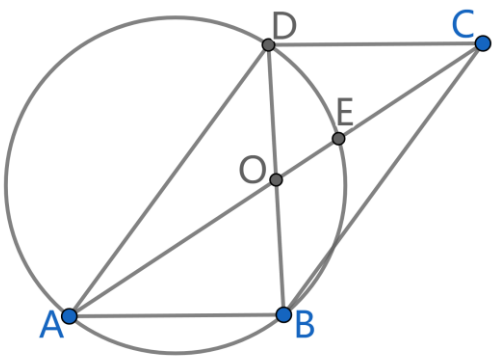


例 5. $\triangle ABC$ 中，设点 $A$ 所对的旁切圆在 $BC$ 边上的切点为 $D$，点 $B$ 所对的旁切圆在 $AC$ 边上的切点为 $E$，点 $C$ 所对的旁切圆在 $AB$ 边上的切点为 $F$，设 $G,I$ 分别为 $\triangle ABC$ 的重心和内心。求证：（1） $AD,BE,CF$ 三线共点，设它为 $N$；（2） $N,G,I$ 三点共线，$G$ 在线段 $NI$ 上，且 $NG=2GI$。

例 6.（2023，高联预赛江西）过平行四边形 $ABCD$ 的顶点 $A,B,D$ 作一圆交直线 $AC$ 于点 $E$。求证：$AB^2+AD^2=AC\cdot AE$。




例 7. 在 $\triangle ABC$ 的边 $AC,AB$ 上分别任取一点 $D,E$。$M,N$ 分别是线段 $BC,DE$ 的中点，点 $H_1,H_2$ 分别是 $\triangle ABD,\triangle ACE$ 的垂心。求证：$H_1H_2\perp MN$。

例 8. 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，$AB=CD$，$L$ 是 $AC$ 的中点，$M$ 是 $AB$ 的中点，$N$ 是 $DL$ 的中点，$K$ 在线段 $MN$ 上，$MK=2KN$。求证：$OK\perp AD$。