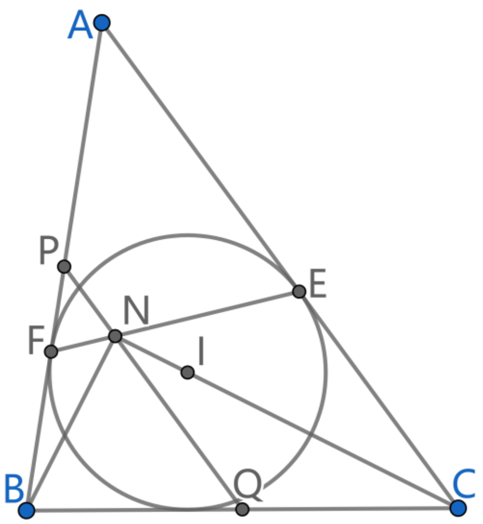
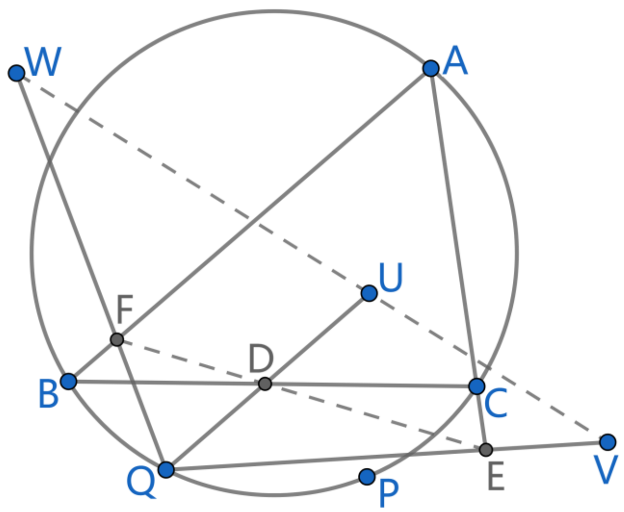
几何选讲-1

例 1.（伊朗引理）$\triangle ABC$ 内切圆 $\odot I$ 切 AC,AB 于 E,F， P,Q 分别为 AB,BC 中点， B 在 CI 上的投影为 N 。求证： P,N,Q 三点共线， F,N,E 三点共线。

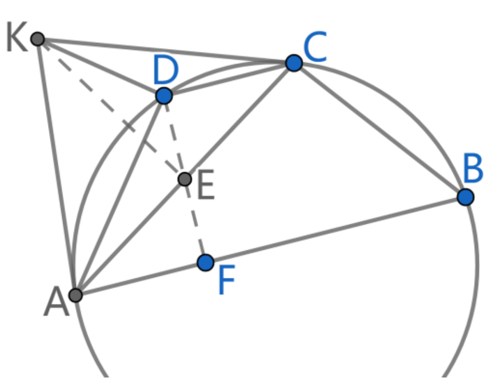
例 2.（清宫定理）设 P,Q 为 $\triangle ABC$ 外接圆上异于 A,B,C 的两点， P 点关于三边 BC,CA,AB 的对称点分别为 U,V,W， QU,QV,QW 分别与直线 BC,CA,AB 交于点 D,E,F 。求证： D,E,F 三点共线。

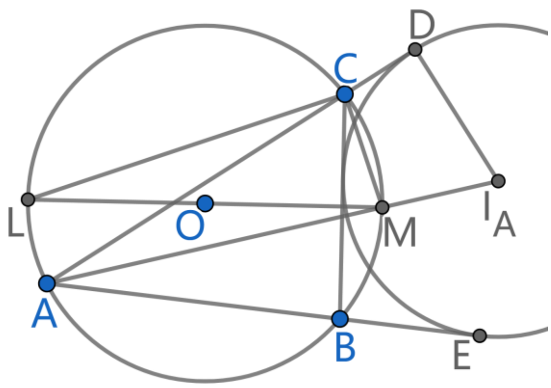




例 3. 等腰梯形 $ABCD$ 中， $AB=3CD$， 过 A 和 C 分别作其外接圆的切线， 两者交于点 K 。求证： $\triangle KDA$ 是直角三角形。

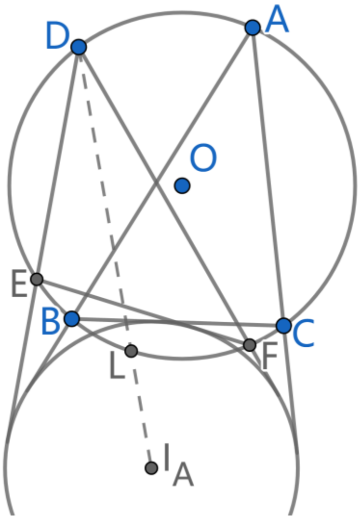
例 4.（旁切圆的欧拉定理）设 $\triangle ABC$ 的外心和点 A 所对的旁心分别为 O,I_A， $\odot I_A$ 的半径为 r_A。求证： $OI_A^2=R^2+2Rr_A$。由此得出 $r_A=R$ 当且仅当 $OI_A=\sqrt{3}R$。

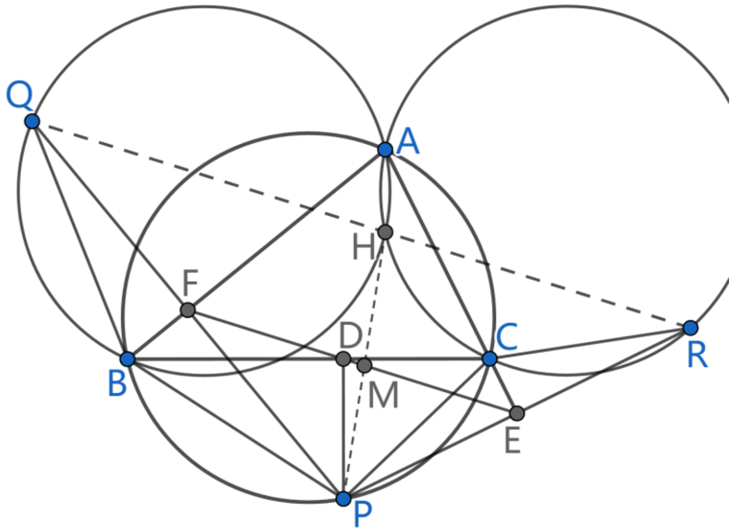




例 5.（关于三角形旁切圆的彭赛列闭合定理）设 $\triangle ABC$ 的外接圆和点 A 所对的旁切圆分别为 $\odot O,\odot I_A$， D,E,F 是 $\odot O$ 上的三个不同的点，满足 DE,DF 的延长线都与 $\odot I_A$ 相切。求证：线段 EF 也和 $\odot I_A$ 相切。

例 6. 设 P 是 $\triangle ABC$ 外接圆上异于 A, B, C 的任意一点，过 P 作三边 BC, CA, AB 的垂线，垂足分别为 D, E, F， H 是 $\triangle ABC$ 的垂心。求证：西姆松线 DEF 平分 PH 。





例 7. 在锐角 $\triangle ABC$ 的 AB, AC 边上分别取点 E, F 使得 $BE \perp CF$， 然后在 $\triangle ABC$ 的内部取点 X 使得 $\angle XBC = \angle EBA, \angle XCB = \angle FCA$。求证： $\angle EXF = \dfrac{\pi}{2} - A$。

例 8. 已知菱形 $ABCD$，作平行四边形 $APQC$，使得 B 在其内部，且 AP 与菱形的边长相等。求证： B 是 $\triangle DPQ$ 的垂心。