不等式选讲：哈代，卡莱曼，希尔伯特（续）

我们从一个常用引理开始。熟知$k\ge 2$时，$\dfrac{1}{k}<\displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，所以对$n\ge 2$，我们有$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<1+\int_{1}^{n}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=1+\log n$。这本质是使用了函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$的单调性。下面的引理能利用$f(x)$的凹凸性，给出一个更紧的界。

引理 0.1. 设$x\in\mathbb{R}$，$\lambda>0$，$I=[x-\lambda,x+\lambda]$。（1）若f在区间I下凸，则$f(x)\le\dfrac{1}{2\lambda}\displaystyle\int_{x-\lambda}^{x+\lambda}f(x)\mathrm{d}x\le\frac{1}{2}(f(x-\lambda)+f(x+\lambda))$；（2）若$f$在区间$I$上凸，则$f(x)\ge\dfrac{1}{2\lambda}\displaystyle\int_{x-\lambda}^{x+\lambda}f(x)\mathrm{d}x\ge\frac{1}{2}(f(x-\lambda)+f(x+\lambda))$。

证. （1）$\displaystyle\int_{x-\lambda}^{x+\lambda}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\lambda}(f(x-t)+f(x+t))\mathrm{d}t\ge\int_{0}^{\lambda}2f(x)\mathrm{d}t=2\lambda f(x)$。类似地，$\displaystyle\int_{x-\lambda}^{x+\lambda}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\lambda}(f(x-t)+f(x+t))\mathrm{d}t\le\int_{0}^{\lambda}f(x-\lambda)+f(x+\lambda)\mathrm{d}t=\lambda(f(x-\lambda)+f(x+\lambda))$。同理可证（2）问。 □

使用上述引理，我们有$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\log(n+\frac{1}{2})+\log 2<1+\log n$，$n\ge 2$。下面介绍哈代不等式的另一证法，它的关键是使用引理分别精确地估计级数$\sum_{k=1}^{n}(\dfrac{2k-1}{2})^{-\alpha}$，$\sum_{n=k}^{\infty}n^{\alpha-2}$，其中$0<\alpha<1$。

例 0.1 (哈代不等式的另证)**.** 设$\alpha=\dfrac{1}{p}$，则$0<\alpha<1$，$(p-1)\alpha=1-\alpha$，$\dfrac{1}{1-\alpha}=\dfrac{p}{p-1}$。由赫尔德不等式，

$$A_n^p\le n^{-p}(\sum_{k=1}^{n}a_k^p(\frac{2k-1}{2})^{(p-1)\alpha})(\sum_{k=1}^{n}(\frac{2k-1}{2})^{-\alpha})^{p-1},\qquad ①$$

其中$A_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$。因为$f(x)=x^{-\alpha}$是下凸函数，所以由引理知$k\ge 1$时，有

$$(\frac{2k-1}{2})^{-\alpha}\le\int_{k-1}^{k}x^{-\alpha}\mathrm{d}x=\frac{1}{1-\alpha}(k^{1-\alpha}-(k-1)^{1-\alpha}),$$

$$\text{于是}(\sum_{k=1}^{n}(\frac{2k-1}{2})^{-\alpha})^{p-1}\le(\frac{1}{1-\alpha}n^{1-\alpha})^{p-1}=(\frac{p}{p-1})^{p-1}n^{\frac{(p-1)^2}{p}},$$

$$①\text{式右边}\le n^{-p}(\sum_{k=1}^{n}a_k^p(\frac{2k-1}{2})^{1-\alpha})(\frac{p}{p-1})^{p-1}n^{\frac{(p-1)^2}{p}}=(\frac{p}{p-1})^{p-1}n^{\alpha-2}(\sum_{k=1}^{n}a_k^p(\frac{2k-1}{2})^{1-\alpha}),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n^p\le(\frac{p}{p-1})^{p-1}\sum_{n=1}^{\infty}[n^{\alpha-2}(\sum_{k=1}^{n}a_k^p(\frac{2k-1}{2})^{1-\alpha})]=(\frac{p}{p-1})^{p-1}\sum_{k=1}^{\infty}[a_k^p(\frac{2k-1}{2})^{1-\alpha}(\sum_{n=k}^{\infty}n^{\alpha-2})],\qquad ②$$

因为$f(x)=x^{\alpha-2}$是下凸函数，所以由引理知$n\ge 1$时，有

$$n^{\alpha-2}\le\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}x^{\alpha-2}\mathrm{d}x=\frac{1}{1-\alpha}((n-\frac{1}{2})^{\alpha-1}-(n+\frac{1}{2})^{\alpha}-1),\qquad\sum_{n=k}^{\infty}n^{\alpha-2}\le\frac{1}{1-\alpha}(k-\frac{1}{2})^{\alpha-1},$$

$$②\text{式右边}\le(\frac{p}{p-1})^{p-1}\sum_{k=1}^{\infty}[a_k^p(\frac{2k-1}{2})^{1-\alpha}\frac{1}{1-\alpha}(k-\frac{1}{2})^{\alpha-1}]=(\frac{p}{p-1})^{p}\sum_{k=1}^{\infty}a_k^p,$$

于是哈代不等式得证。

习题 0.1 (调和级数的下界)**.** 熟知$k\ge 1$时，$\dfrac{1}{k}>\displaystyle\int_{k}^{k+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，所以对$n\ge 2$，我们有$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\int_{1}^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=$

$\log(n+1)$。这本质是使用了函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$的单调性。我们可以利用函数$\dfrac{1}{x}$下凸的特性给一个更紧的下界。

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1})\geq\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x,\qquad \sum_{k=1}^n\frac{1}{k}>\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})+\int_1^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}+\log n,$$

我们已经证明了$\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}-\log n<\log(1+\frac{1}{2n})+\log 2<\frac{1}{2n}+\log 2$。因为$\frac{1}{n}+\log(n-1)-\log n=\frac{1}{n}+\log(1-\frac{1}{n})<0$，所以数列$a_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}-\log n$单调，而且$\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}<a_n<\log 2+\frac{1}{2n}$，所以$\{a_n\}_{n\geq 1}$有界。由此可定义欧拉常数$\gamma=\lim_{n\to\infty}a_n\sim 0.5772156649...$。我们证出了$\gamma\in[\frac{1}{2},\log 2]$。

瑞典数学家Lennart Carleson（1928年至今）因证明了Lusin猜想，即单位圆上L^2函数的傅里叶级数几乎处处收敛到自身而著名。他提出了下述不等式，作为卡莱曼不等式的推广：

定理 0.1 (Carleson不等式)**.** 对任意下凸函数$g:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}$，$g(0)=0$，和任意的$-1<p<\infty$，我们有

$$\int_0^\infty x^p\exp(-\frac{g(x)}{x})\mathrm{d}x\leq \mathrm{e}^{p+1}\int_0^\infty x^p\mathrm{e}^{-g'(x)}\mathrm{d}x,\qquad ①$$

证. （1）因为$g(x)$是下凸函数，所以对任意$k>1$，$x\geq 0$，有$g(kx)\geq g(x)+(k-1)xg'(x)$ ②，上式右边为$g(x)$在x处的切线。于是对任意$A>0$，有

$$\begin{aligned}k^{-p-1}\int_0^A x^p\exp(-\frac{g(x)}{x})\mathrm{d}x&=k^{-p-1}\int_{0\leq x\leq A/k}(kx)^p\exp(-\frac{g(kx)}{kx})\mathrm{d}(kx)\\ \leq\int_0^A x^p\exp(-\frac{g(kx)}{kx})\mathrm{d}x&\leq\int_0^A x^p\exp(-\frac{g(x)}{kx}-\frac{k-1}{k}\cdot g'(x))\mathrm{d}x \qquad \text{（由②式）}\\ \leq(\int_0^A x^p\exp(-\frac{g(x)}{x})\mathrm{d}x)^{1/k}&(\int_0^A x^p\mathrm{e}^{-g'(x)}\mathrm{d}x)^{(k-1)/k},\qquad ③ \text{（由柯西不等式）}\end{aligned}$$

设$I_1=\int_0^A x^p\exp(-\frac{g(x)}{x})\mathrm{d}x$，$I_2=\int_0^A x^p\mathrm{e}^{-g'(x)}\mathrm{d}x$，则由③式，$I_1\leq k^{(p+1)\cdot k/(k-1)}I_2$，设$k=1+\frac{1}{\beta}$，$\beta=\frac{1}{k-1}$，我们有$\lim\limits_{k\to 1}k^{k/(k-1)}=\lim\limits_{\beta\to\infty}(1+\frac{1}{\beta})^{1+\beta}=\mathrm{e}$。所以$I_1\leq\lim\limits_{k\to 1}k^{(p+1)\cdot k/(k-1)}I_2=\mathrm{e}^{p+1}I_2$，①式得证。

注：①式右边的常数e^{p+1}是最优的。设$\epsilon>0$，$g(x)=\begin{cases}0, & 0\leq x\leq 1,\\ (p+1+\epsilon)x\log x, & x>1,\end{cases}$，可以验证此时$g(x)$下凸且$g(0)=0$，$x>1$时，$g'(x)=(p+1+\epsilon)(\log x+1)$。$\epsilon\to 0$时，我们有

$$①\text{式左边}=\int_1^\infty x^p\exp(-(p+1+\epsilon)\log x)\mathrm{d}x=\int_1^\infty x^{p-(p+1+\epsilon)}\mathrm{d}x=\frac{1}{\epsilon},$$

$$①\text{式右边}=\mathrm{e}^{p+1}(\int_0^1 x^p\mathrm{d}x+\int_1^\infty x^p\exp(-(p+1+\epsilon)(\log x+1))\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^{p+1}(\frac{1}{p+1}+\int_1^\infty\frac{x^p}{(xe)^{p+1+\epsilon}}\mathrm{d}x)=\frac{\mathrm{e}^{p+1}}{p+1}+\int_1^\infty\frac{1}{x^{1+\epsilon}e^{\epsilon}}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{p+1}}{p+1}+\frac{1}{\epsilon\mathrm{e}^{\epsilon}},$$

所以$\lim\limits_{\epsilon\to 0}\dfrac{①\text{式左边}}{①\text{式右边}}=1$，①式右边的常数$\mathrm{e}^{p+1}$是最优的。 $\square$

用$Carleson$不等式证明卡莱曼不等式. 回忆离散形式的卡莱曼不等式的叙述：设$a_n \geq 0$, $n \geq 1$，则有

$$\sum_{n\geq 1}(a_1a_2...a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \mathrm{e}\sum_{n\geq 1}a_n, \qquad ①$$

若存在$1 \leq i < j$,使得$a_i < a_j$，交换a_i, a_j会使上式左边变大，右边不变。所以我们只需要证明数列$\{a_n\}$单调递减的情形。此时，在Carleson不等式中令$p = 0$，有：$\int_0^\infty \exp(-\frac{g(x)}{x})\mathrm{d}x \leq \mathrm{e}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-g'(x)}\mathrm{d}x$ ②。令$g(x)$是下述连续的分段线性函数，满足

$$g(0) = 0, \qquad 对任意n \in \mathbb{Z}_+，当n-1 < x < n时， \quad g'(x) = -\log a_n,$$

则$g(x)$在$\mathbb{R}_+$上是下凸函数，且$\frac{g(x)}{x}$单调增。对任意$n \in \mathbb{Z}_+$，$\int_{n-1}^n \mathrm{e}^{-g'(x)}\mathrm{d}x = \int_{n-1}^n a_n\mathrm{d}x = a_n$。所以②式右边$=\mathrm{e}\sum_{n=1}^\infty a_n =$①式右边。又因为

$$\int_{n-1}^n \exp(-\frac{g(x)}{x})\mathrm{d}x \geq \int_{n-1}^n \exp(-\frac{g(n)}{n})\mathrm{d}x = \int_{n-1}^n \exp(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log a_i)\mathrm{d}x = (a_1a_2...a_n)^{\frac{1}{n}},$$

所以②式左边$\geq \sum_{n=1}^\infty (a_1a_2...a_n)^{\frac{1}{n}} =$①式左边。综上所述，①式得证。 □

笔者没有搞懂Carleson对Lusin猜想的证明，但他提出的上述不等式在我的能力范围内，这篇论文长度只有不到一页半，太巧妙了。事实上，卡莱曼不等式的证明中我们用到了更重要且不平凡的斯特林近似公式$n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{\mathrm{e}})^n$, $n \to \infty$。笔者打算专门写一篇关于它的文章。

例 0.2. 设$\{x_n\}_{n\geq 1}$，$\{y_n\}_{n\geq 1}$是任意复数列，$\{f_n(z)\}_{n\geq 1}$，$\{g_n(z)\}_{n\geq 1}$是定义在$z \in D$上任意的两列函数，满足对所有$j, k \geq 1$，有$\int_D |f_j(z)|^2\mathrm{d}z \leq \alpha^2$，$\int_D |g_k(z)|^2\mathrm{d}z \leq \beta^2$。求证：若复数组$\{a_{j,k}\}_{j\geq 1, k\geq 1}$满足下列估计：$\big|\sum_{j,k\geq 1} a_{j,k}x_jy_k\big| \leq M\|x\|_2\|y\|_2$，则我们同样有下列估计

$$\big|\sum_{j,k\geq 1} a_{j,k}h_{j,k}x_jy_k\big| \leq \alpha\beta M\|x\|_2\|y\|_2, \qquad ①$$

这里已知$h_{j,k}$有如下的积分表达形式$h_{j,k} = \int_D f_j(z)g_k(z)\mathrm{d}z$。

证. 对固定的$z \in D$，我们有

$$\big|\sum_{j,k\geq 1} a_{j,k}x_jf_j(z)y_kg_k(z)\big| \leq M\|\{x_jf_j(z)\}_{j\geq 1}\|_2\|\{y_kg_k(z)\}_{k\geq 1}\|_2,$$

$$于是①式左边 = \big|\sum_{j,k\geq 1} a_{j,k}x_jy_k\int_D f_j(z)g_k(z)\mathrm{d}z\big|$$

$$\leq \int_D \big|\sum_{j,k\geq 1} a_{j,k}x_jf_j(z)y_kg_k(z)\big|\mathrm{d}z \leq \int_D M(\sum_{j\geq 1}|x_jf_j(z)|^2)^{1/2}(\sum_{k\geq 1}|y_kg_k(z)|^2)^{1/2}\mathrm{d}z$$

$$\leq M(\int_D \sum_{j\geq 1}|x_jf_j(z)|^2\mathrm{d}z)^{1/2}(\int_D \sum_{k\geq 1}|y_kg_k(z)|^2\mathrm{d}z)^{1/2}, \qquad ②$$

因为$\int_D \sum_{j\geq 1}|x_jf_j(z)|^2\mathrm{d}z = \sum_{j\geq 1}|x_j|^2\int_D |f_j(z)|^2\mathrm{d}z \leq \|x\|_2^2\alpha^2$，同理，$\int_D \sum_{k\geq 1}|y_kg_k(z)|^2\mathrm{d}z \leq \|y\|_2^2\beta^2$，所以②式右边$\leq$①式右边，①式得证。 □

例 0.3 (希尔伯特不等式的变形). （1）设$\{a_n\}_{n\geq 1}$，$\{b_n\}_{n\geq 1}$是两列实数，我们有

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{\max(m,n)}\leq 4\sqrt{(\sum_{m=1}^{\infty}a_m^2)(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2)}, \qquad ①$$

（2）设$\{a_n\}_{n\geq 1}$，$\{b_n\}_{n\geq 1}$是两列非负实数，$p,q>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，我们有

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{\max(m,n)}\leq pq(\sum_{m=1}^{\infty}a_m^p)^{1/p}(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^q)^{1/q}, \qquad ②$$

证. （1）我们仿照希尔伯特不等式的证法一，由柯西不等式，有

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{\max(m,n)}\leq (\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{a_m^2}{\max(m,n)}\sqrt{\frac{m}{n}})^{1/2}(\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{b_n^2}{\max(m,n)}\sqrt{\frac{n}{m}})^{1/2}, \qquad ③$$

对固定的$m\geq 1$，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\max(m,n)}\sqrt{\frac{m}{n}}=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{m}\sqrt{\frac{m}{n}}+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{m}{n}}\leq\frac{1}{\sqrt{m}}\int_0^m\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x+\sqrt{m}\int_m^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{m}}\cdot 2\sqrt{m}+\sqrt{m}\cdot\frac{2}{\sqrt{m}}=4, \qquad \text{同理，对固定的}n\geq 1,\ \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\max(m,n)}\sqrt{\frac{n}{m}}\leq 4,$$

于是③式右边$\leq 4\cdot$①式右边，①式得证。

（2）由赫尔德不等式，设待定参数λ满足$0<\lambda<\frac{1}{\max(p,q)}$，我们有

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{\max(m,n)}\leq (\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{a_m^p}{\max(m,n)}(\frac{m}{n})^{p\lambda})^{1/p}(\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{b_n^q}{\max(m,n)}(\frac{n}{m})^{q\lambda})^{1/q}, \qquad ④$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{m}{n})^{p\lambda}=\sum_{n=1}^{m}m^{p\lambda-1}n^{-p\lambda}+\sum_{n=m+1}^{\infty}m^{p\lambda}n^{-1-p\lambda}\leq m^{p\lambda-1}\int_0^m x^{-p\lambda}\mathrm{d}x$$

$$+m^{p\lambda}\int_m^{\infty}x^{-1-p\lambda}\mathrm{d}x=m^{p\lambda-1}\frac{1}{1-p\lambda}m^{1-p\lambda}+m^{p\lambda}\frac{1}{p\lambda}m^{-p\lambda}=\frac{1}{(1-p\lambda)p\lambda},$$

同理，$\sum_{m=1}^{\infty}(\frac{n}{m})^{q\lambda}\leq\frac{1}{(1-q\lambda)q\lambda}$，所以

$$④\text{式右边}\leq (\sum_{m=1}^{\infty}a_m^p)^{1/p}(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^q)^{1/q}(\frac{1}{(1-p\lambda)p\lambda})^{1/p}(\frac{1}{(1-q\lambda)q\lambda})^{1/q}, \qquad ⑤$$

我们需要最小化$(\frac{1}{(1-p\lambda)p\lambda})^{1/p}(\frac{1}{(1-q\lambda)q\lambda})^{1/q}$。设$F(\lambda)=\frac{1}{p}(\log(p\lambda)+\log(1-p\lambda))+\frac{1}{q}(\log(q\lambda)+\log(1-q\lambda))$，则$F'(\lambda)=\frac{1}{p}(\frac{1}{\lambda}+\frac{-p}{1-p\lambda})+\frac{1}{q}(\frac{1}{\lambda}+\frac{-q}{1-q\lambda})$是单调减函数。令$F'(\lambda)=0$，则

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{1-p\lambda}+\frac{1}{1-q\lambda}, \qquad 1-(p+q)\lambda+pq\lambda^2=(2-(p+q)\lambda)\lambda,$$

$$0=2pq\lambda^2-(pq+2)\lambda+1=(pq\lambda-1)(2\lambda-1), \qquad \text{因为}\frac{1}{2}\geq\frac{1}{\max(p,q)},\text{所以舍去}\lambda=\frac{1}{2},$$

于是解得$\lambda=\dfrac{1}{pq}$时$F(\lambda)$最大。此时$\dfrac{1}{(1-p\lambda)p\lambda}=\dfrac{1}{(1-\frac{1}{q})\frac{1}{q}}=pq=\dfrac{1}{(1-q\lambda)q\lambda}$，⑤式右边=②式右边，所以②式成立。注：②式右边的常数pq是最优的（所以①式右边的常数4也是最优的）。设ϵ是一个小正数，满足$1+\epsilon<\min(p,q)$。令$a_n=n^{-\frac{1+\epsilon}{p}}$，$b_n=n^{-\frac{1+\epsilon}{q}}$，则$\epsilon\to 0$时，有

$$\sum_{n\ge1}a_n^p=\sum_{n\ge1}b_n^q=\sum_{n\ge1}n^{-1-\epsilon}\sim\int_1^\infty x^{-1-\epsilon}\mathrm{d}x=\frac{1}{\epsilon},$$
$$\sum_{m,n=1}^\infty\frac{a_mb_n}{\max(m,n)}=\sum_{m,n=1}^\infty\frac{1}{\max(m,n)m^{\frac{1+\epsilon}{p}}n^{\frac{1+\epsilon}{q}}}\ge\iint_{[1,\infty)^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\max(x,y)}x^{-\frac{1+\epsilon}{p}}y^{-\frac{1+\epsilon}{q}}$$
$$=\int_1^\infty\mathrm{d}x\int_x^\infty\mathrm{d}yx^{-\frac{1+\epsilon}{p}}y^{-1-\frac{1+\epsilon}{q}}+\int_1^\infty\mathrm{d}y\int_y^\infty\mathrm{d}xx^{-1-\frac{1+\epsilon}{p}}y^{-\frac{1+\epsilon}{q}},\qquad ⑥$$

设⑥式右边的两项分别为A,B，令$y=xt,x=yu$，我们有

$$A=\int_1^\infty\mathrm{d}x\int_1^\infty\mathrm{d}(xt)x^{-\frac{1+\epsilon}{p}}(xt)^{-1-\frac{1+\epsilon}{q}}=\int_1^\infty\mathrm{d}x\int_1^\infty\mathrm{d}tx^{-1-\epsilon}t^{-1-\frac{1+\epsilon}{q}}=\frac{1}{\epsilon}\frac{q}{1+\epsilon},$$
$$B=\int_1^\infty\mathrm{d}y\int_1^\infty\mathrm{d}(yu)(yu)^{-1-\frac{1+\epsilon}{p}}y^{-\frac{1+\epsilon}{q}}=\int_1^\infty\mathrm{d}y\int_1^\infty\mathrm{d}uy^{-1-\epsilon}u^{-1-\frac{1+\epsilon}{p}}=\frac{1}{\epsilon}\frac{p}{1+\epsilon},$$
$$⑥\text{式右边}=\frac{1}{\epsilon}\frac{p+q}{1+\epsilon}=\frac{pq}{\epsilon(1+\epsilon)}\sim\frac{pq}{\epsilon},\qquad\lim_{\epsilon\to0}\Big(\sum_{m,n=1}^\infty\frac{a_mb_n}{\max(m,n)}\Big/\Big[\Big(\sum_{m=1}^\infty a_m^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{n=1}^\infty b_n^q\Big)^{\frac{1}{q}}\Big]\Big)=pq,$$

所以②式右边的常数pq是最优的。 □

例 0.4. 瑞典数学家Fritz Carlson（1888年—1952年，早于上一个Carleson）于1935年证明了下述不等式：

$$\Big(\sum_{k=1}^n a_k\Big)^4\le\pi^2\Big(\sum_{k=1}^n a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^n k^2a_k^2\Big),\qquad ①$$

证. 由柯西不等式，$(\sum_{k=1}^n a_k)^2\le(\sum_{k=1}^n\frac{1}{w_k})(\sum_{k=1}^n a_k^2w_k)$　②。设$t>0$, $w_k(t)=t+\dfrac{k^2}{t}$，则

$$\frac{t}{t^2+k^2}=\frac{1}{1+(\frac{k}{t})^2}\cdot\frac{1}{t}\le\int_{\frac{k-1}{t}}^{\frac{k}{t}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan\frac{k}{t}-\arctan\frac{k-1}{t},$$
$$\sum_{k=1}^n\frac{1}{w_k(t)}=\sum_{k=1}^n\frac{t}{t^2+k^2}\le\sum_{k=1}^n\Big(\arctan\frac{k}{t}-\arctan\frac{k-1}{t}\Big)=\arctan\frac{n}{t}\le\frac{\pi}{2},$$
$$\sum_{k=1}^n a_k^2w_k(t)=t\Big(\sum_{k=1}^n a_k^2\Big)+\frac{1}{t}\Big(\sum_{k=1}^n k^2a_k^2\Big)\ge2\Big(\sum_{k=1}^n a_k^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k=1}^n k^2a_k^2\Big)^{1/2},\qquad ③$$

取$t=(\sum_{k=1}^n k^2a_k^2)^{1/2}/(\sum_{k=1}^n a_k^2)^{1/2}$，此时③式等号成立。所以②式右边$\le\dfrac{\pi}{2}\cdot$③式左边$=\dfrac{\pi}{2}\cdot$③式右边$=\pi(\sum_{k=1}^n a_k^2)^{1/2}(\sum_{k=1}^n k^2a_k^2)^{1/2}$，①式成立。注：①式右边的常数$\pi^2$是最优的。设$t>0$，令$a_k=\dfrac{t}{t^2+k^2}$，则$t\to\infty$时，有

$$\sum_{k=1}^\infty a_k=\sum_{k=1}^\infty\frac{t}{t^2+k^2}=\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1+(\frac{k}{t})^2}\sim\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2},$$
$$\sum_{k=1}^\infty a_k^2=\sum_{k=1}^\infty\frac{t^2}{(t^2+k^2)^2}=\frac{1}{t}\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{(1+(\frac{k}{t})^2)^2}\sim\frac{1}{t}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}=\frac{\pi}{4t},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 t^2}{(t^2+k^2)^2} = t\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t}\cdot\frac{(k/t)^2}{(1+(\frac{k}{t})^2)^2} \sim t\int_0^{\infty} \frac{x^2\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi t}{4},$$

我们在计算上述积分时作了代换$x=\tan\alpha$，$x\in[0,\infty)$，$\alpha\in[0,\frac{\pi}{2})$，所以

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\tan\alpha}{(1+\tan\alpha^2)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\alpha\mathrm{d}\alpha = \frac{\pi}{4},$$
$$\int_0^{\infty} \frac{x^2\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \int_0^{\infty} \frac{\tan^2\alpha}{(1+\tan\alpha^2)^2}\mathrm{d}\tan\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\alpha\mathrm{d}\alpha = \frac{\pi}{4},$$

于是$\lim\limits_{t\to\infty} \frac{(\sum_{k=1}^{\infty} a_k)^4}{(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2)(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k^2)} = \lim\limits_{t\to\infty} (\frac{\pi}{2})^4 \Big/ (\frac{\pi}{4t}\cdot\frac{\pi t}{4}) = \pi^2$，这说明①式右边的常数$\pi^2$是最优的。 □

例 0.5 (希尔伯特不等式的另一个更困难的情形)**.** 设$\{a_n\}_{n\geq 1}$，$\{b_n\}_{n\geq 1}$是两个复数列，我们有

$$\Big|\sum_{\substack{m,n\geq 1,\\ m\neq n}} \frac{a_m\overline{b_n}}{m-n}\Big| \leq \pi\sqrt{(\sum_{m=1}^{\infty}|a_m|^2)(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2)} = \pi\|a\|_2\|b\|_2, \qquad ①$$

证. 使用Toeplitz法，$n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$时，$\int_0^{2\pi}(t-\pi)e^{\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{\mathrm{i}n}$；$n=0$时，$\int_0^{2\pi}(t-\pi)e^{\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}(t-\pi)\mathrm{d}t = 0$。设$\tilde{a}(t) = \sum_{m\geq 1} a_m e^{\mathrm{i}mt}$，则由Plancherel定理，$\|\tilde{a}\|_2 = \sqrt{2\pi}\|a\|_2$。所以我们有

$$\Big|\sum_{\substack{m,n\geq 1,\\ m\neq n}} \frac{a_m\overline{b_n}}{m-n}\Big| = \Big|\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_0^{2\pi}(t-\pi)(\sum_{m\geq 1} a_m e^{\mathrm{i}mt})(\sum_{n\geq 1}\overline{b_n}e^{-\mathrm{i}nt})\mathrm{d}t\Big|$$
$$\leq \frac{\|t-\pi\|_\infty}{2\pi}\int_0^{2\pi}|(\sum_{m\geq 1} a_m e^{\mathrm{i}mt})(\sum_{n\geq 1}\overline{b_n}e^{-\mathrm{i}nt})|\mathrm{d}t \leq \frac{\|t-\pi\|_\infty}{2\pi}2\pi\|a\|_2\|b\|_2 = \pi\|a\|_2\|b\|_2,$$

这里$\|t-\pi\|_\infty$是函数$t\mapsto t-\pi$，$0\leq t\leq 2\pi$的L^∞范数，$\|t-\pi\|_\infty=\pi$，最后一步使用了柯西不等式和Plancherel定理。注：①式右边的常数π是最优的，但笔者暂时没证出来这件事，等证出来的时候再修改文章吧。 □