1 几何小测-2

例 1.1. 设$\triangle ABC$中边AB的中点为N，$\angle A > \angle B$，D为射线AC上一点，满足$CD = BC$，P为射线DN上一点，且与点A在BC同侧，满足$\angle PBC = \angle A$，PC与AB交于点E，BC与DP交于点T，求$\dfrac{BC}{TC} - \dfrac{EA}{EB}$。

证. 设直线BP交AC于J点，由梅涅劳斯定理，

$$\frac{BT}{TC} = \frac{AD}{DC} = \frac{b+a}{a}, \qquad \frac{AE}{EB} = \frac{AC}{CJ}\cdot\frac{JP}{PB} = \frac{AC}{CJ}\cdot\frac{JD}{DC}\cdot\frac{CT}{TB}$$
$$= \frac{b}{a^2/b}\cdot\frac{a^2/b+a}{a}\cdot\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}, \qquad \text{所以}\frac{BC}{TC} - \frac{EA}{EB} = \frac{b}{a} + 2 - \frac{b}{a} = 2,$$

□

例 1.2. $\triangle ABC$中，E是AC边上一点，G线段BE上一点。$\odot O$经过A和G，且与BE相切，延长CG与$\odot O$相交于K。求证：$CG\cdot GK = AG^2\cdot\dfrac{CE}{EA}$。

证. □

例 1.3. 在$\triangle ABC$中，$AB = AC$，在过A且平行于BC的直线上取两点D, E。直线BD与CE相交于F，$\triangle ABE$的外接圆与$\triangle ACD$的外接圆相交于A, G两点。求证：A, F, G三点共线。

证. □

例 1.4. $\triangle ABC$的内切圆$\odot I$分别与BC, CA, AB相切于点D, E, F，AD与EF相交于G，点O, O_1, O_2分别是$\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle ACD$的外心，M是O_1O_2的中点。求证：$OM /\!/ IG$。

证. 设$\angle O_1OM = \alpha$, $\angle O_2OM = \beta$, $\angle FIG = \alpha'$, $\angle EIG = \beta'$，我们有

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{OO_2}{OO_1} = \frac{\sin\angle OO_1O_2}{\sin\angle OO_2O_1}, \qquad \frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'} = \frac{FG}{GE} = \frac{\sin\angle FAG}{\sin\angle EAG},$$

□

例 1.5.

证. □

2 进阶思维摸底考试

例 2.1. 已知直线$y = x$与抛物线$E: x^2 = 4y$交于A, B两点，C为抛物线E上的一点，且满足$\triangle ABC$的外接圆与抛物线E在点C处相切。求C点坐标。

解. 抛物线过点C的切线为$l: x_Cx = 2(y + y_C)$，斜率为$k = \dfrac{x_C}{2}$。由条件知l也与$\triangle ABC$的外接圆相切，于是$\measuredangle(l, BC) = \angle BAC$, $\dfrac{k+1}{k-1} = \dfrac{k_{AC}+k_{BC}}{1-k_{AC}k_{BC}} = \dfrac{\dfrac{y_C}{x_C} + \dfrac{y_C-4}{x_C-4}}{1 - \dfrac{y_C}{x_C}\cdot\dfrac{y_C-4}{x_C-4}} = \dfrac{y_C(x_C-4)+x_C(y_C-4)}{x_C(x_C-4)-y_C(y_C-4)}$ ①。

$$\text{①式左边} = \frac{x_C+2}{2-x_C}, \qquad \text{①式右边} = \frac{2x_C\cdot\dfrac{x_C^2}{4} - 4(x_C + \dfrac{x_C^2}{4})}{x_C^2 - \dfrac{x_C^4}{16} + 4(\dfrac{x_C^2}{4} - x_C)}$$

$$= \frac{\frac{x_C^2}{2} - 4 - x_C}{x_C - \frac{x_C^3}{16} + x_C - 4} = \frac{(x_C - 4)(\frac{x_C}{2} + 1)}{(x_C - 4)(-\frac{x_C^2}{16} - \frac{x_C}{4} + 1)} = \frac{x_C + 2}{-\frac{x_C^2}{8} - \frac{x_C}{2} + 2},$$

所以①式解得$x_C = -2$或$-\frac{x_C^2}{8} - \frac{x_C}{2} + 2 = 2 - x_C$，$x_C = 0$或$4$。上述三个解中后两个解会使$C$与$A,B$重合，都应舍去。所以$C$点坐标为$(-2,1)$。 □

例 2.2. 已知实数a,b,c,d,e满足下列条件：$a \le b \le c \le d \le e$，$a+e=1$，$b+c+d=3$，$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=14$。求$ae$的最大值和最小值。

证. 求ae的最大值，即求e的最小值，$a=b=-1$，$c=d=e=2$时符合题意，下证$e \ge 2$。反证法：假设$e<2$，则$a>-1$，$-1<b \le c \le d<2$。因为x^2是下凸函数，所以$b^2+c^2+d^2<(1-c)^2+c^2+2^2<(-1)^2+2^2+2^2=9$（这里作了两次调整），但$a^2+e^2<5$，$b^2+c^2+d^2>14-5=9$，矛盾！所以$e_{\min}=2$，$(ae)_{\min}=-2$。 □

例 2.3. 设$\triangle ABC$的内心为I，点A对应的旁心为I_A，$\triangle ABC$的内切圆分别与直线BC,CA,AB切于点D,E,F，直线EF,BC交于点P，X为线段PD的中点。求证：$XI \perp DI_A$。

证. 设$\odot I_A$在BC边上的切点为D'，要证$\angle IXD = \angle DI_AD'$ ①。由梅涅劳斯定理，$=\frac{BP}{PC}=\frac{BF}{FA}\cdot\frac{AE}{EC}=\frac{BF}{EC}=\frac{p-b}{p-c}$，又因为$CP-BP=a$，所以$BP=a\cdot\frac{p-b}{b-c}$，$CP=a\cdot\frac{p-c}{b-c}$。

$$PD = PB + BD = (p-b)(\frac{a}{b-c}+1) = \frac{2(p-b)(p-c)}{b-c}, \qquad XD = \frac{PD}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{b-c}$$

$$①\text{式} \iff \frac{ID}{XD} = \frac{DD'}{I_AD'} \iff \frac{r(b-c)}{(p-b)(p-c)} = \frac{b-c}{r_A} \iff \frac{r}{p-b} = \frac{p-c}{r_A}, \qquad ②$$

因为$\frac{r}{p-b}=\frac{ID}{BD}=\tan\frac{B}{2}=\frac{BD'}{I_AD'}=\frac{p-c}{r_A}$，所以②式，①式成立，$XI \perp DI_A$。 □

例 2.4. 求所有的正整数$n \ge 2$，使得存在实数$a_1,a_2,...,a_n$，满足如下条件：（1）$\sum_{i=1}^n a_i = 0$；（2）$\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$；（3）$\sum_{i=1}^n a_i^3 = 2b - \frac{2}{\sqrt{n}}$，其中$b=\max_{1\le i\le n}(a_i)$。

证. 设$c<b$为待定常数，则对任意$x \le b$，有$(x-b)(x-c)^2 \le 0$，即$x^3 \le (b+2c)x^2-(c^2+2bc)x+bc^2$。上式中令$x=a_1,a_2,...,a_n$再求和，得

$$\sum_{i=1}^n a_i^3 \le (b+2c)\sum_{i=1}^n a_i^2 - (c^2+2bc)\sum_{i=1}^n a_i + nbc^2 = b+2c+nbc^2, \qquad ①$$

对固定的b，令$c=-\frac{1}{nb}$，此时$c<0<b$且①式右边取最小值。于是

$$①\text{式} \iff b - \frac{1}{nb} \ge 2b - \frac{2}{\sqrt{n}} \iff b - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{nb} \le 0 \iff (\sqrt{n}b-1)^2 \le 0,$$

所以$b=\frac{1}{\sqrt{n}}$，$c=-\frac{1}{nb}=-\frac{1}{\sqrt{n}}$，此时①式等号成立，所有$a_i$，$1\le i\le n$只能取$\frac{1}{\sqrt{n}}$或$-\frac{1}{\sqrt{n}}$。因为$\sum_{i=1}^n a_i=0$，所以$n$只能为偶数。此时对$1\le i\le\frac{n}{2}$，令$a_i=\frac{1}{\sqrt{n}}$，对$\frac{n}{2}+1\le i\le n$，令$a_i=-\frac{1}{\sqrt{n}}$，容易验证三个题设条件都满足。于是所有满足条件的$n(n\ge 2)$为所有正偶数。 □

3 三角法练习-1

例 3.1. P在$\triangle ABC$内，满足$\angle ABP=10^\circ$，$\angle CBP=40^\circ$，$\angle ACP=20^\circ$，$\angle BCP=30^\circ$。试求$\angle BAP$的度数。

证. 设$\angle BAP=\alpha$，$\angle CAP=80^\circ-\alpha$，由角元塞瓦定理，

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(80^\circ-\alpha)}=\frac{\sin 10^\circ}{\sin 40^\circ}\cdot\frac{\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{1}{2\sin 40^\circ\cdot 2\cos 10^\circ}=\frac{1}{2(\sin 30^\circ+\sin 50^\circ)},$$

$$(1+2\sin 50^\circ)\sin\alpha=\sin 80^\circ\cos\alpha-\cos 80^\circ\sin\alpha,\qquad \tan\alpha=\frac{\sin 80^\circ}{1+\cos 80^\circ+2\sin 50^\circ}$$

$$=\frac{\sin 80^\circ}{2\cos^2 40^\circ+2\cos 40^\circ}=\frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ+1}=\tan 20^\circ,\qquad \alpha=20^\circ,$$

□

例 3.2. 点D,E,F分别在$\triangle ABC$的边BC,CA,AB上，AD,BE,CF交于一点。点G_1,G_2,G_3分别是$\triangle AEF$，$\triangle BDF$，$\triangle CDE$的重心。求证：三直线AG_1,BG_2,CG_3交于一点。

证. 因为AG_1是$\triangle AEF$的中线，所以

$$\frac{\sin\angle FAG_1}{\sin\angle EAG_1}=\frac{AE}{AF},\qquad \text{同理,}\quad \frac{\sin\angle ECG_3}{\sin\angle DCG_3}=\frac{CD}{CE},\qquad \frac{\sin\angle DBG_2}{\sin\angle FBG_2}=\frac{BF}{BD},$$

由塞瓦定理，上述三式左边乘积 $=$ 上述三式右边乘积 $=1$。由角元塞瓦定理知AG_1,BG_2,CG_3交于一点。

□

例 3.3. 点P,Q,R与$\triangle ABC$在同一平面上，直线AQ与AR关于$\angle BAC$的平分线对称，直线BR与BP关于$\angle ABC$的平分线对称，直线CP与CQ关于$\angle ACB$的平分线对称。求证：直线AP,BQ,CR交于一点。

证. 由正弦定理，$\dfrac{\sin\angle BAP}{BP}=\dfrac{\sin\angle ABP}{AP}$，$\dfrac{\sin\angle CAP}{CP}=\dfrac{\sin\angle ACP}{AP}$，$\dfrac{BP}{CP}=\dfrac{\sin\angle BCP}{\sin\angle CBP}$，

$$\text{所以}\frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle CAP}=\frac{\sin\angle ABP}{\sin\angle ACP}\cdot\frac{\sin\angle BCP}{\sin\angle CBP}\qquad ①,\quad \text{同理,}$$

$$\frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle CAP}=\frac{\sin\angle ABP}{\sin\angle ACP}\cdot\frac{\sin\angle BCP}{\sin\angle CBP}\qquad ②,\qquad \frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle CAP}=\frac{\sin\angle ABP}{\sin\angle ACP}\cdot\frac{\sin\angle BCP}{\sin\angle CBP}\qquad ③,$$

因为$\angle ABP=\angle CBR$，$\angle BCQ=\angle ACP$，$\angle CAR=\angle BAQ$，$\angle BCP=\angle ACQ$，$\angle CAQ=\angle BAR$，$\angle ABR=\angle CBP$，所以

$$\frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle CAP}\cdot\frac{\sin\angle CBQ}{\sin\angle ABQ}\cdot\frac{\sin\angle ACR}{\sin\angle BCR}=\text{①②③式右边乘积}=1,$$

由角元塞瓦定理知AP,BQ,CR交于一点。注：其实可以直接在$\triangle ABC$中由角元塞瓦定理得到①式。 □

例 3.4. AB是半圆$\odot O$的直径，C是OB的中点，四边形$BCDE$是矩形，点F在半圆$\odot O$上，$AF/\!/CE$。过F作半圆$\odot O$的切线与直径AD相交于P。求证：$BD\perp BP$。

证. 设$\angle ECB=\alpha$，过B点作BD的垂线BQ，我们证明AP,FP,BQ三线共点。在$\triangle ABF$中，由角元塞瓦定理，这等价于$\dfrac{\sin\angle AFP}{\sin\angle BFP}\cdot\dfrac{\sin\angle FBQ}{\sin\angle ABQ}\cdot\dfrac{\sin\angle BAP}{\sin\angle FAP}=1\iff\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)}\cdot\dfrac{OD}{AO}=1$ ①。这里用到$\angle FBQ=\angle ABQ-\angle ABF=\dfrac{\pi}{2}+\alpha-(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)=2\alpha$，$\dfrac{\sin\angle BAP}{\sin\angle FAP}=\dfrac{\sin\angle OAD}{\sin\angle ODA}=\dfrac{OD}{AO}$。①式左边$=2\cos\alpha\cdot\dfrac{OD}{2OC}=1$，①式成立，$BP\perp BD$。 □

例 3.5. $\triangle ABC$的内切圆$\odot I$分别与AB,AC相切于F,E，AD为$\triangle ABC$的内角平分线，点J,K分别是$\triangle ABD$，$\triangle ACD$的内心。求证：$\angle IFJ=\angle KEC$。

证. 因为B,J,I三点共线，所以$\tan\angle IFJ=\dfrac{\sin\angle IFJ}{\sin\angle BFJ}=\frac{IJ}{BJ}\cdot\dfrac{BF}{IF}$ ①。舍近求远：

$$\frac{IJ}{BJ}=\frac{AI}{AB}=\frac{ID}{BD}=\frac{AD}{AB+BD}=\frac{\sin B}{\sin(C+\frac{A}{2})+\sin\frac{A}{2}}=\frac{\sin B}{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}},\qquad \frac{BF}{IF}=\cot\frac{B}{2},$$

所以$\tan\angle IFJ=$①式右边$=\dfrac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$。同理，$\cot\angle KEC=\tan\angle IEK=\dfrac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}=\cot\angle IFJ$。所以$\angle IFJ=\angle KEC$。更快的做法：

$$\frac{IJ}{BJ}=\frac{AI}{AB}=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}},\qquad \text{或者}\frac{IJ}{BJ}=\frac{ID}{BD}=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}},$$

□

例 3.6. $\triangle ABC$内接于圆ω，过B,C两点分别作ω的切线，与过A作ω的切线相交于点P,Q，$AH\perp BC$于H。求证：$\angle AHP=\angle AHQ$。

证. 因为$\dfrac{\sin\angle AHP}{AP}=\dfrac{\sin\angle PAH}{PH}$，$\dfrac{\sin\angle BHP}{BP}=\dfrac{\sin\angle PBH}{PH}$，所以

$$\tan\angle AHP=\frac{\sin\angle PAH}{\sin\angle PBH}=\frac{\sin\angle PAH}{\sin A},\qquad \text{同理,}\quad \tan\angle AHQ=\frac{\sin\angle QAH}{\sin A}=\tan\angle AHP,$$

所以$\angle AHP=\angle AHQ$。 □

例 3.7. AH是锐角$\triangle ABC$的高，点M是AC的中点。点D在线段MB的延长线上，$AD\perp AC$。求证：$\angle BAD=\angle BHD$。

证. 法一：设A'为A关于BM的对称点，则$MA=MH=MC=MA'$，于是A,H,C,A'四点共圆，圆心为M。$\angle AA'D=\dfrac{\pi}{2}-\angle MA'A=\angle BMA$，$\angle HBD=\pi-\angle MBC=\pi-(\angle BMA-C)$。

法二（三角法）：$\angle BAD=\frac{\pi}{2}-A$，所以原式$\Longleftrightarrow\tan\angle BHD=\cot A$ ①。设$\angle MBC=\alpha$，我们有$\angle ADB=\frac{\pi}{2}-\alpha-C$，

$$\tan\angle BHD=\frac{BD\sin\alpha}{BH+BD\cos\alpha},\qquad BD=AB\cdot\frac{\sin\angle DAB}{\sin\angle ADB}=\frac{c\cos A}{\cos(\alpha+C)},\qquad \text{①式}\Longleftrightarrow$$

$$0=BD(\cos\alpha\cos A-\sin\alpha\sin A)+BH\cos A=BD\cos(A+\alpha)+BH\cos A,\qquad ②$$

因为$BH=c\cos B$，所以②式$\Longleftrightarrow 0=\cos(A+\alpha)+\cos B\cos(\alpha+C)=\cos\alpha(\cos A+\cos B\cos C)-\sin\alpha(\sin A+\cos B\sin C)=\cos\alpha\sin B\sin C-\sin\alpha(\cos C\sin B+2\cos B\sin C)$ ③。因为

$$\tan\alpha=\frac{b\sin C/2}{c\cos B+\frac{b\cos C}{2}}=\frac{\sin B\sin C}{2\cos B\sin C+\sin B\cos C},$$

所以③式右边$=0$，②, ①式和原式都成立。 □

4 几何小测-3

例 4.1. 设$A+B+C=\pi$，求证：（1）$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+2\cos A\cos B\cos C=1$；（2）$\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+$

$\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}=1$。

证. □

例 4.2. 设$A+B+C=\pi$，求证：对任意的实数x,y,z，均有 $x^2+y^2+z^2\geq 2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C$。

证. 左边 $-$ 右边 $=(x-y\cos C-z\cos B)^2+(y\sin C-z\sin B)^2\geq 0$。 □

例 4.3. 设锐角α,β满足$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)$，求证：$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$。

证. □

例 4.4. 设a,b为实数，已知方程$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$至少有一个实数根，求a^2+b^2的最小值。

解. 设$t=x+\dfrac{1}{x}$，则题设条件等价于$f(t)=t^2-2+at+b=0$有$t\geq 2$或$t\leq -2$的实根 ①。所以$\Delta=a^2-4(b-2)\geq 0$，且要排除两实根都在$(-2,2)$的情形，即$-\dfrac{a}{2}\in(-2,2)$，$f(-2)=2-2a+b\geq 0$，$f(2)=2+2a+b>0$。于是(a,b)的范围为$\{b\leq\dfrac{a^2}{4}+2\}\cap\{b\leq 2a-2$，或$b\leq -2a-2$，或$|a|\geq 4\}$。设$l:b=2a-2$，$l':b=-2a-2$，画出该区域的图像知$(a,b)$为原点$O$在$l$或$l'$上的投影时$a^2+b^2$最小，所以$a^2+b^2\geq d(O,l)^2=\dfrac{4}{5}$，$a=\dfrac{4}{5}$，$b=-\dfrac{2}{5}$时等号成立，此时$f(t)=t^2+\dfrac{4}{5}t-2-\dfrac{2}{5}=(t+2)(t-\dfrac{6}{5})$满足条件①。所以$a^2+b^2$最小为$\dfrac{4}{5}$。 □

例 4.5. 设A,C,B,D是直线上依次排列的四个点，O是CD中点且O在A,B同侧。请分别从下列四个式子推出$A,B;C,D$是调和点列。（1）$\dfrac{2}{AB}=\dfrac{1}{AD}+\dfrac{1}{AC}$；（2）$OC^2=OD^2=OA\cdot OB$；（3）$AC\cdot AD=AB\cdot AO$；（4）$AB\cdot OD=AC\cdot BD$。

证. □

例 4.6. $\odot O_1$与$\odot O_2$相交于A,B，过A作AB的垂线，分别交$\odot O_1,\odot O_2$于M,N，P是MN中点，点Q,R分别在$\odot O_1$与$\odot O_2$上，$\angle AO_1Q=\angle AO_2R$。求证：$PQ=PR$。

证. □

例 4.7. 四边形$ABCD$内接于圆，过AB上一点M分别作AD,CD,BC的垂线，垂足分别为P,Q,R，PR与MQ相交于N。求证：$\dfrac{PN}{NR}=\dfrac{AM}{BM}$。

证. □

5 综合练习-1

一、小蓝本平面几何

例 5.1 (P14，习题6)**.** $\triangle ABC$的内心为I，过B作$l_B\perp CI$，过C作$l_C\perp BI$，D是l_B,l_C的交点。若l_B交AC于点N，l_C交AB于点M，线段BN, CM的中点分别为E,F。求证：$EF\perp AI$。

证. □

例 5.2 (P14，习题8)**.** 设H为锐角$\triangle ABC$的垂心，过点H作垂直于BH的直线交AB于点D，过点H作垂直于CH的直线交AC于点E，过点C作垂直于BC的直线交DE于点F。求证：$FH=FC$。

证. □

例 5.3 (P15，习题11). $\odot O$的一条弦AB将圆分成两部分，M, N分别是两段弧的中点，以B为旋转中心，将弓形AMB按顺时针方向旋转一个角度形成弓形A_1MB。若AA_1的中点为P，MN的中点为Q，求证：$MN = 2PQ$。

证. □

例 5.4 (P15，习题15). 圆ω与$\triangle ABC$的边AC，AB相切，圆Ω与边AC和AB的延长线相切，且与ω相切于边BC上的L点。直线AL分别与圆ω和Ω第二次相交于点K和M。已知$KB /\!/ CM$，求证：$\triangle LCM$是等腰三角形。

分析：本题中可以固定$\triangle ABC$的位置，将AM的长度视为未知数，通过$KB /\!/ CM$列方程解出AM。

证. 因为ω, Ω的外位似中心为A，设该变换将ω映为Ω，则它将K, L分别映为L, M，于是$\dfrac{AK}{AL} = \dfrac{AL}{AM}$，$AK \cdot AM = AL^2$。设$\angle BAL = \angle CAL = \alpha$，$AL = 1$，$\angle BLA = \beta$，则由正弦定理，$AB = AL \cdot \dfrac{\sin\angle ALB}{\sin\angle ABL} = \dfrac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$，$AC = AL \cdot \dfrac{\sin\angle ALC}{\sin\angle ACL} = \dfrac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$。因为$KB /\!/ CM$，所以$\dfrac{CL}{BL} = \dfrac{ML}{KL}$。设$CV \perp AL$于点$V$，我们有$\dfrac{CL}{BL} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}$，$\dfrac{ML}{KL} = \dfrac{AM}{AL} = AM$，$AM + AL = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\alpha)} + 1 = \dfrac{2\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} = 2AC\cos\alpha = 2AV$，$LV = VM$。又因为$CV \perp LM$，所以$CL = CM$。 注：本题中其实不需要$\omega, \Omega$两圆与$AB, AC$相切，只需要$AL$平分$\angle BAC$，且$AK \cdot AM = AL^2$即可。 □

例 5.5 (P16，习题16). PA, PB为$\odot O$的切线，点C在劣弧AB上（不含点A, B）。过点C作PC的垂线l，与$\angle AOC$的平分线交于点D，与$\angle BOC$的平分线交于点E。求证：$CD = CE$。

证. □

例 5.6 (P16，习题17). 设M, N是$\triangle ABC$内部的两个点，且满足$\angle MBA = \angle NBC$，$\angle MAB = \angle NAC$，$\angle MBA = \angle NBC$。求证：$\dfrac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \dfrac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \dfrac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB} = 1$ ①。

证. N是M在$\triangle ABC$中的等角共轭点，$\angle MCB = \angle NCA$。设U, V, W分别是点N关于BC, CA, AB的对称点，则$[AVM] = [AWM] = \dfrac{1}{2}AM \cdot AN \cdot \sin A$，$\dfrac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} = \dfrac{[AVM]}{[ABC]} = \dfrac{[AWM]}{[ABC]}$。同理，$\dfrac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} = \dfrac{[BWM]}{[ABC]} = \dfrac{[BUM]}{[ABC]}$，$\dfrac{CM \cdot CN}{AB \cdot AC} = \dfrac{[CUM]}{[ABC]} = \dfrac{[CVM]}{[ABC]}$。于是①式左边$= \dfrac{1}{2[ABC]}([AVM] + [AWM] + [BWM] + [BUM] + [CUM] + [CVM]) = 1$。 □

二、数列练习

例 5.7. （1）数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$满足$a_1 = 2$，$n \geq 1$时，$a_{n+1} = \dfrac{2(n+2)}{n+1} \cdot a_n$，求$a_{100}$。 （2）数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$满足$a_1 = 2$，$n \geq 1$时，$a_n + a_{n+1} = 1$。设$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$，求$S_{1001} - 2S_{1000} + S_{999}$。

解. （1）$\dfrac{a_{n+1}}{n+2} = 2 \cdot \dfrac{a_n}{n+1} = ... = 2^n \cdot \dfrac{a_1}{2} = 2^n$，$a_n = (n+1)2^{n-1}$。 （2） □

例 5.8. （1）数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$满足$a_1 = 3$，$n \geq 1$时，$a_{n+1} = 2a_n + 3$，求$\{a_n\}$的通项。 （2）数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$满足$a_1 = 1$，$a_2 = 3$，且对任意正整数n，都有$a_{n+2} \leq a_n + 3 \cdot 2^n$且$a_{n+1} \geq 2a_n + 1$，求$\{a_n\}$的通项。 （3）数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$满足$a_1 = 2$，且$n \geq 1$时，$a_{n+1} = 4a_n + 2^{n+1}$，求$\{a_n\}$的通项。 （4）数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$满足$a_1 = 2$，且$n \geq 1$时，$a_{n+1} = 2a_n^3$，求$\{a_n\}$的通项。

证. （1）$a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3) = ... = 2^n(a_1 + 3) = 3 \cdot 2^{n+1}$，$a_n = 3 \cdot 2^n - 3$。 （2） □

例 5.9. （1）数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$中，$a_1=1$，$n\geq 2$时，$a_n=\frac{n}{n-1}a_{n-1}+2n\cdot 3^{n-2}$，求$\{a_n\}$的通项。（2）数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$中，$a_1=2$，$n\geq 1$时，$(n+1)a_{n+1}=a_n+n$，求$\{a_n\}$的通项。

证. （2）$(n+1)(a_{n+1}-1)=a_n-1$, $(n+1)!(a_{n+1}-1)=n!(a_n-1)=...=a_1-1=1$, $a_n=1+\frac{1}{n!}$。 □

例 5.10. 已知数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$满足$a_1=\frac{1}{2}$，$n\geq 1$时，$a_{n+1}=\frac{na_n}{(n+1)(na_n+1)}$，求$\{a_n\}$的通项。

证. $\frac{1}{(n+1)a_{n+1}}=\frac{na_n+1}{na_n}=1+\frac{1}{na_n}=...=n+\frac{1}{a_1}=n+2$, $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$。 □

例 5.11. 设正数数列$\{a_n\}_{n\geq 0}$满足$a_0=a_1=1$，$n\geq 2$时，$\sqrt{a_na_{n-2}}-\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}=a_{n-1}$，求$\{a_n\}$的通项。

证. 递推式左右同时除以$\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}$，得$\sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}}-1=\sqrt{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}$, $\sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}}=\sqrt{\frac{a_1}{a_0}}+n-1=n$, $a_n=n^2a_{n-1}=...=(n!)^2a_0=(n!)^2$。 □

例 5.12. 已知数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$满足$a_1=0$，$n\geq 1$时，$a_{n+1}=a_n+1+2\sqrt{1+a_n}$，求$\{a_n\}$的通项。

证. $a_{n+1}+1=a_n+1+2\sqrt{1+a_n}+1=(\sqrt{a_n+1}+1)^2$, $\sqrt{a_{n+1}+1}=\sqrt{a_n+1}+1=...=\sqrt{a_1+1}+n=n+1$, $\sqrt{a_n+1}=n$, $a_n=n^2-1$。 □

例 5.13. 设数列$\{a_n\}_{n\geq 0}$满足$a_1=2$，$a_{m+n}+a_{m-n}-m+n=\frac{1}{2}\cdot(a_{2m}+a_{2n})$，其中$m,n$为任意满足$m\geq n$的自然数。求证：对任意$n\geq 0$，都有$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$；（2）$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_{1000}}<1$。

证. □

6 综合小测-4

例 6.1. 任意正整数N可以唯一地表示成不同且不相邻的斐波那契数之和，即存在唯一的正整数m和一列指标$\{i_j\}_{j=1}^m$，使得$2\leq i_1<i_2<...<i_m$，$i_j-i_{j-1}\geq 2$ $(2\leq j\leq m)$，且$N=\sum_{j=1}^m F_{i_j}$。这里$F_1=F_2=1$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ $(n\geq 1)$。

证. □

例 6.2. 数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$满足$a_1=1$, $a_2=-1$，且$a_{n+2}+a_{n+1}+2a_n=0$ $(n\geq 1)$。（1）求$\{a_n\}$的通项；（2）求证：对任意正整数n，$2^{n+2}-7a_n^2$是完全平方数。

证. （1）$\{a_n\}$的特征方程为$x^2+x+2=0$，特征根为$\alpha=\frac{-1+\sqrt{-7}}{2}$, $\overline{\alpha}=\frac{-1-\sqrt{-7}}{2}$。存在常数$A,B$，使得$a_n=A\alpha^n+B\overline{\alpha}^n$。 □

例 6.3. 正实数数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$满足：对任意正整数n，都有$\sum_{j=1}^n a_j^3=(\sum_{j=1}^n a_j)^2$。求证：对任意正整数$n$，都有$a_n=n$。

证. $n=1$时命题成立。$n\geq 2$时，假设已经证明命题对$1,2,...,n-1$成立，则$a_j=j$, $1\leq j\leq n-1$，$\sum_{j=1}^{n-1}a_j^3=(\sum_{j=1}^{n-1}a_j)^2=[\frac{n(n-1)}{2}]^2$。设$x=a_n$，由题设条件有$x^3+[\frac{n(n-1)}{2}]^2=[x+\frac{n(n-1)}{2}]^2$, $x^3=x^2+2x\cdot\frac{n(n-1)}{2}$, $x(x+n-1)(x-n)=0$。因为$x>0$，所以$a_n=x=n$，命题对n成立。由归纳法知命题对任意正整数n成立。 □

例 6.4. 定义卢卡斯数列$\{L_n\}_{n\geq 0}$如下：$L_0=2$，$L_1=1$，且$n\geq 2$时$L_n=L_{n-1}+L_{n-2}$。（1）求$\{L_n\}$的通项；（2）设正整数$n\geq 5$，将$(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n$写成十进制小数，求它小数点后的第一位数。

证. □

例 6.5. （1）回忆定比分点公式，证明：若P为$\triangle ABC$内一点，则$[PBC]\cdot\overrightarrow{PA}+[PCA]\cdot\overrightarrow{PB}+[PAB]\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$；（2）设$I$为$\triangle ABC$的内心，求证：$\sin A\cdot\overrightarrow{IA}+\sin B\cdot\overrightarrow{IB}+\sin C\cdot\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$。

证. □

例 6.6. 给定四边形$ABCD$，分别以它的四条边为斜边向外作等腰直角三角形，得到点X,Y,Z,U。求证：XZ与YU垂直且相等。

证. □

例 6.7. 已知AD,BE,CF是$\triangle ABC$的角平分线，点M,N在BC边上，满足$FM\parallel AD\parallel EN$。求证：$AD$平分$\angle MAN$。

证. □

7 综合练习-2

例 7.1 (杨博睿)**.** 设$ABCD$为圆内接四边形，在射线BA上取点E使得$BE=BC$，在射线DA上取点F使得$DF=DC$。设H为EF中点，求证：$BH\perp DH$。

证. 法一：设C关于BD的对称点为J，则B为$\triangle CJE$的外心，D为$\triangle CJF$的外心。所以

$$\angle CJE=\pi-\frac{1}{2}\angle CBE,\quad \angle CJF=\pi-\frac{1}{2}\angle CDF,\quad \angle CJE+\angle CDF=2\pi-\frac{1}{2}(\angle CBE+\angle CDF)=\frac{3\pi}{2},$$

于是$\angle EJF=\dfrac{\pi}{2}$，$HE=HJ=HF$，$\triangle HEB\cong\triangle HJB$，$\triangle HFD\cong\triangle HJD$，$\angle BHD=\dfrac{1}{2}(\angle EHJ+\angle FHJ)=\dfrac{\pi}{2}$。

法二：设K为BD中点，则$\overrightarrow{HK}=\dfrac{1}{2}(B+D-E-F)=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FD})$。 □

例 7.2. 求证：对任意的正整数n，都有$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}<\dfrac{5}{3}$。注：著名的巴塞尔问题说$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$，约为1.644934。用$\dfrac{5}{3}$对它做估计相差不到0.022。

证. 左边$\leq 1+\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-\frac{1}{4}}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2})}=1+\sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{k-\frac{1}{2}}-\frac{1}{k+\frac{1}{2}})=1+\frac{2}{3}-\frac{2}{2n+1}<\frac{5}{3}$。 □

例 7.3. 设数列$\{x_n\}_{n\geq 1}$满足$x_1=x_2=x_3=1$，且$n\geq 1$时，$x_{n+3}=x_n+x_{n+1}x_{n+2}$。求证：（1）对任意正整数$m$，都存在正整数$T$，使得对任意正整数$n$都有$a_{n+T}\equiv a_n\pmod m$。（2）对任意正整数$m$，都存在正整数$k$使得$m|x_k$。

证. □

例 7.4. 设$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，复数列$\{z_n\}_{n\geq 1}$满足$z_1=z_2=\alpha$，且$n\geq 1$时，$2z_{n+2}=3\alpha z_{n+1}+(1-\alpha)z_n$。求证：对任意正整数$n$，都有$|z_n-\alpha^n|<2$。

证. □

例 7.5. 已知z是复数，且关于x的方程$4x^2-8zx+4\mathrm{i}+3=0$有实根。求$|z|$的最小值。

证. □

例 7.6 (2004，重庆高考文)**.** 设数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$满足$a_1=1$，$a_2=\dfrac{5}{3}$，且$n\geq 1$时$a_{n+2}=\dfrac{5}{3}a_{n+1}-\dfrac{2}{3}a_n$。求$\{a_n\}$的通项公式。

证. $\{a_n\}$的特征方程为$x^2-\dfrac{5}{3}x+\dfrac{2}{3}=0$，特征根为$\alpha=1$，$\beta=\dfrac{2}{3}$。 □

例 7.7 (2004，高联)**.** 已知数列$\{a_n\}_{n\geq 0}$满足$a_0=3$，$n\geq 0$时$(3-a_{n+1})(6+a_n)=18$，求$\sum_{i=0}^n\dfrac{1}{a_i}$的值。

证. □

例 7.8. 已知$x_1=1$，$x_2=6$，$n\geq 2$时$x_{n+1}=6x_n-9x_{n-1}+3^n$。求数列$\{x_n\}_{n\geq 1}$的通项。

证. □

例 7.9. 在$\triangle ABC$中，已知$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$，求$\cos B$的最小值。

证. □

8 综合练习-3

例 8.1. （1）求$(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^3$的值；（2）化简$(\mathrm{i}+1)^{1000}+(\mathrm{i}-1)^{1000}$；（3）复数$z$满足$(z-3)(2-\mathrm{i})=5$，求$z$的值；（4）复数$z=\dfrac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$的共轭复数在复平面的第几象限？（5）求$\mathrm{i}^{2001}+(\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i})^8+(\dfrac{\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}})^{10}+\dfrac{(2-4\mathrm{i})^2+(2\mathrm{i}+4)^2}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}$的值。

证. □

例 8.2. （1）设a,b,c,d为复数，若集合$S=\{a,b,c,d\}$具有性质“对任意$x,y\in S$必有$xy\in S$”，则当$a=1$，$b^2=1$，$c^2=b$时，求$b+c+d$的值。（2）设复数$z=x+(x^2-1)\mathrm{i}\ (x\in\mathbb{R})$，求$|z|$的最小值。（3）已知复数$z$满足$\dfrac{z}{z-2}$是纯虚数，求$|z+2|$的取值范围。

证. □

例 8.3. （1）设复数z满足$|z|<1$且$|\overline{z}+\dfrac{1}{z}|=\dfrac{5}{2}$，求$|z|$的值。（2）已知复数$z_1=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，$z_2=-\sqrt{3}+\sqrt{3}\mathrm{i}$，求复数$z_1z_2$的幅角主值。

证. □

例 8.4. （1）已知向量$\mathbf{a},\mathbf{b}$不共线，实数x,y满足向量等式$3x\mathbf{a}+(10-y)\mathbf{b}=2x\mathbf{b}+(4y+7)\mathbf{a}$，求$x,y$的值。（2）在四边形$ABCD$中，$\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}-2\mathbf{b}$，$\overrightarrow{CD}=3\mathbf{a}-4\mathbf{b}+2\mathbf{c}$，对角线$AC,BD$的中点分别为$E,F$，试用$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$表示向量$\overrightarrow{EF}$。

证. □

例 8.5. （1）已知$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$的夹角为$\dfrac{2\pi}{3}$，且$|\mathbf{a}|=2$，$|\mathbf{b}|=5$，求$(2\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}$的值。（2）已知向量$\mathbf{a}=(1,\sqrt{3})$，$\mathbf{b}=(-\sqrt{3},1)$，求向量$\mathbf{a}$与$\mathbf{a}+\mathbf{b}$的夹角。（3）给定非零向量$\mathbf{a},\mathbf{b}$，求证：$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$的充要条件是$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$。

证. □

例 8.6. （1）设$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$是同一平面内的三个单位向量，且$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$。求$(\mathbf{c}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{b})$的最大值。 （2）设平面向量$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$满足$|\mathbf{a}+2\mathbf{b}|=3$, $|2\mathbf{a}+3\mathbf{b}|=4$，求$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$的最小值。

证. □

例 8.7. （1）设复数z_1,z_2满足$|z_1|=2$, $|z_2|=3$，且它们所对应向量的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$，求$|\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}|$的值。 （2）若复数$x,y,z$的模长均为1，求证：$|xy+yz+zx|=|x+y+z|$。

证. □

例 8.8. 在关于x的方程$x^2+z_1x+z_2+m=0$中，z_1,z_2,m都是复数，且$z_1^2-4z_2=16+20\mathrm{i}$。设这个方程的两根$\alpha,\beta$满足$|\alpha-\beta|=2\sqrt{7}$，求$|m|$的最大值。

证. □

9 综合小测-5

例 9.1. 求下列函数的导函数： （1）$f(x)=x^5+\dfrac{1}{x}$； （2）$f(x)=4^x-x-1$； （3）$f(x)=\dfrac{1}{x^{3/2}+2}$； （4）$f(x)=x^3\ln x$； （5）$f(x)=\tan x$； （6）$f(x)=x-\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$； （7）$f(x)=\ln(\sin x)$； （8）$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$； （9）$f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$； （10）$f(x)=x^x$。

解. （1）$f'(x)=5x^4-\dfrac{1}{x^2}$； （2）$f'(x)=4^x\ln 4-1$； （3）$f'(x)=-\dfrac{3\sqrt{x}}{2(x^{3/2}+2)^2}$； （4）$f'(x)=x^2(1+3\ln x)$； （5） □

例 9.2. （1）非负实数x,y,z满足$x+y+z=3$，求$F=x^2+y^2+z^3$的最小值； （2）非负实数a,b,c满足$a+b+c=1$，求$G=a+\sqrt{b}+\sqrt[4]{c}$的最大值。

证. （1）$F\geq\dfrac{(x+y)^2}{2}+z^3=\dfrac{(3-z)^2}{2}+z^3=z^3+\dfrac{z^2}{2}-3z+\dfrac{9}{2}$，$F'(z)=3z^2+z-3$，它的唯一正根是$z_0=\dfrac{-1+\sqrt{37}}{6}$。

（2） □

例 9.3. （1）设正整数m,n满足$n^2<m<(n+1)^2$，试用无穷递降法证明$\sqrt{m}$是无理数。（2）设n为正整数，$S_n=1+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{n}$。回忆e的定义中$(1+\dfrac{1}{n})^n<\mathrm{e}<(1+\dfrac{1}{n})^{n+1}$，求证：$\ln(n+1)<S_n<1+\ln n$，这说明调和级数是发散的。

证. □

例 9.4. 设数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$满足$a_1>0$，$n\geq 2$时$a_n=a_{n-1}+\dfrac{1}{a_{n-1}}$。求证： （1）当$n\geq 2$时，$a_n\geq\sqrt{2n}$； （2）不存在实数$c$，使得$a_n<\sqrt{2n+c}$对所有的$n$都成立。

证. □

例 9.5 (2023，高联B卷)**.** $\triangle ABC$的外心为O，在AB上取一点D，延长OD至点E，使得A,O,B,E四点共圆。若$OD=2$, $AD=3$, $BD=4$, $CD=5$，求证：$\triangle ABE$与$\triangle CDE$的周长相等。

证. □

例 9.6. 设O为原点，$A_1, A_2, ..., A_n$是单位圆内接正n边形的顶点，平面上一点P满足$OP = d$。求证：（1）$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{0}$；（2）$PA_1^2 + PA_2^2 + ... + PA_n^2 = n + nd^2$。

证. □