

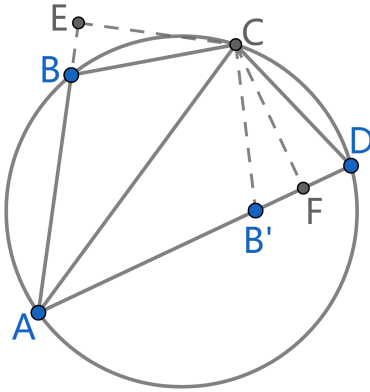
1 圆的性质-2

例 1.1. 如图, 点 B, D 在 AC 异侧, 且满足 $\angle BAC = \angle DAC$, $BC = CD$, $AB \neq AD$ 。求证: A, B, C, D 四点共圆。

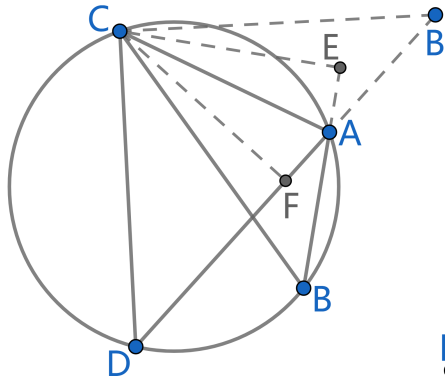
证. □

例 1.2. 如图, 点 B, D 在 AC 同侧, 且满足 $\angle BAC + \angle DAC = \pi$, $BC = CD$ 。求证: A, B, C, D 四点共圆。

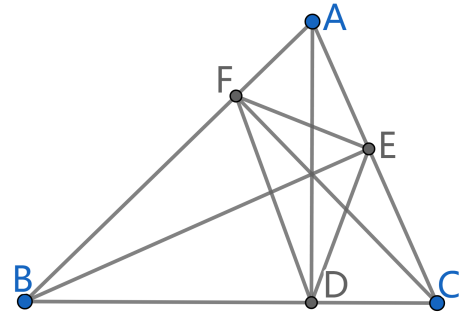
证. □



例1



例2



例3

例 1.3. 锐角 $\triangle ABC$ 中, D, E, F 分别在边 BC, CA, AB 上, 且满足 $\angle BDF = \angle CDE$, $\angle CED = \angle AEF$, $\angle AFE = \angle BFD$, $\angle CED = \angle AEF$, $\angle AFE = \angle BFD$ 。求证: AD, BE, CF 分别是 BC, CA, AB 边上的高。

证. □

例 1.4 (2024,高联B卷)。在凸四边形 $ABCD$ 中, AC 平分 $\angle BAD$, 且 $AC^2 = AB \cdot AD$ 。点 E, F 分别在边 BC, CD 上, 满足 $EF \parallel BD$ 。 $\odot(CBF)$ 和 $\odot(CDE)$ 交于 C 及另一点 T 。求证: T 在直线 AC 上。

证. $\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle TBF \sim \triangle TED$, □

例 1.5. 已知 A, B, C, D 四点共圆, AC 交 BD 于 E , AD 交 BC 于 F 。作平行四边形 $DECG$ 和 E 关于直线 DF 的对称点 H , 求证: D, G, F, H 四点共圆。

证. $\triangle FAB \sim \triangle FCD$, $\triangle FBE \sim \triangle FDG$, 所以 $\angle FGD = \angle FEB = \pi - \angle FED = \pi - \angle FHD$ 。 □

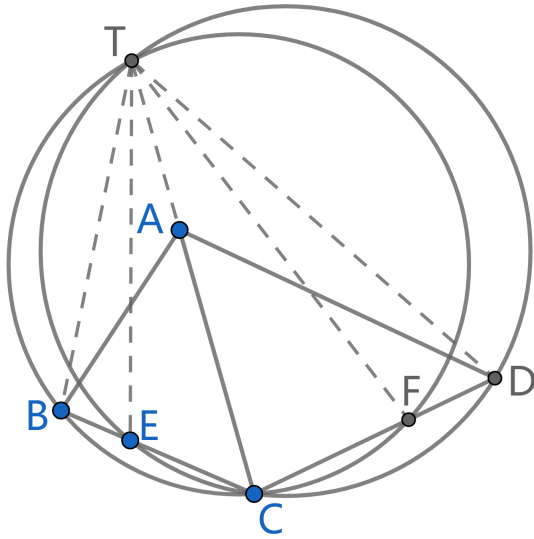
例 1.6. 设 $ABCD$ 是一个平行四边形, P 是它两条对角线的交点, M 是 AB 边的中点。点 Q 满足 QA 与 $\odot(MAD)$ 相切, QB 与 $\odot(MBC)$ 相切。求证: Q, M, P 三点共线。

证. 只需证明 $d(Q, AD) = d(Q, BC)$, 即 $QA \sin \angle QAD = QB \sin \angle QBC \iff \frac{QA}{QB} = \frac{\sin \angle QBC}{\sin \angle QAD}$ ①。

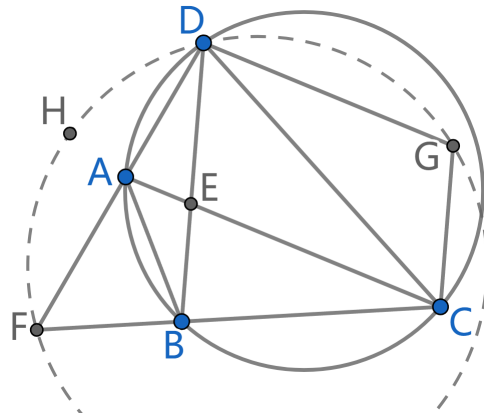
$\angle QAD = \pi - \angle DMA = \pi - \angle MDC$, $\angle QBC = \pi - \angle CMB = \pi - \angle MCD$, ①式右边 = $\frac{\sin \angle MCD}{\sin \angle MDC} = \frac{MD}{MC}$ 。

因为 $AD \parallel BC \parallel PM$, 所以①式左边 = $\frac{\sin \angle QBA}{\sin \angle QAB} = \frac{\sin \angle MCB}{\sin \angle MDA} = \frac{\sin \angle PMC}{\sin \angle PMD}$, 又因为 $1 = \frac{[PMC]}{[PMD]} =$

$\frac{MC \sin \angle PMC}{MD \sin \angle PMD}$, 所以①式成立。 □



例4



例5

例 1.7. $\triangle ABC$ 中, $AN \perp BC$ 于 N , M 是 BC 中点, 过 M 任意作一条直线与以 AB 为直径的圆交于 D, E 两点, $\triangle ADE$ 的垂心为 H 。求证: A, H, C, N 四点共圆。

证.

□

例 1.8. $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$, 过 A 作 $\angle B, \angle C$ 的外角平分线的垂线, 垂足分别为 D, E 。设 O 为 $\triangle ABC$ 的外心, 求证: $\odot(BOC)$ 与 $\odot(AED)$ 相切。

证.

□

2 数列和函数的极限

例 2.1 (2012, 高联B卷). 设数列 $\{x_n\}_{n \geq 0}$ 满足 $x_0 > 0, x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}, n \geq 0$ 。求证: 存在常数 $A > 1$ 和常数 $C > 0$, 使得 $|x_n - A| < \frac{C}{A^n}$ 对任意正整数 n 成立。

分析: 本题中我们可以执果索因, 利用待证结论确定常数 A 的值。假设待证结论成立, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 。对递推式两边取 $n \rightarrow \infty$ 的极限, 我们有

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n + 1} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + 1} = \sqrt{A + 1}, \quad A^2 = A + 1, \quad A = \frac{\sqrt{5} + 1}{2},$$

证. 令 $A = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$, 则有 $A^2 = A + 1$, 而且

$$|x_{n+1} - A| = |\sqrt{x_n + 1} - A| = \frac{|x_n + 1 - A^2|}{\sqrt{x_n + 1} + A} = \frac{|x_n - A|}{\sqrt{x_n + 1} + A} \leq \frac{|x_n - A|}{A},$$

□

3 几何选讲-2

例 3.1. 锐角 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, CP, BQ 分别为 AB, AC 边上的高, P, Q 为垂足。直线 PQ 交 BC 于 X 。 $\triangle AXC$ 外接圆与 $\triangle PQC$ 外接圆再次相交于点 Y 。求证: PY 平分 AX 。

证. 法一 (同一法): 设 AX 中点为 D , PD 与 $\triangle AXC$ 外接圆交于 Y' 点。作 P 关于 D 的对称点 R , 则四边形 $APXR$ 是平行四边形, $\angle ARX = \angle APX = C$, 所以 A, C, X, R 四点共圆。 $DY' \cdot DP = DY' \cdot DR = DA \cdot DX = DA^2$, 于是 $\triangle DY'A \sim \triangle DAP$, $\angle DY'A = \angle DAP$ 。又因为 $\angle AXC + \angle AY'D + \angle CY'D = \angle AXC + \angle AY'C = \pi = \angle AXC + \angle XAP + B$, 所以 $\angle CY'D = B$, Y', P, B, C 四点共圆。于是 Y' 就是 $\triangle PQC$ 外接圆与 $\triangle AXC$ 外接圆的另一个交点, Y, Y' 重合, PY 平分 AX 。

法二 (三角法): 设 BC 中点为 M , $BPQC$ 四点共圆, 圆心为 M 。设 $\triangle AXC$ 外心为 N , $\angle NMC = \angle YBC = \alpha$, 则 $\angle APY = \frac{\pi}{2} - \angle CPY = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\angle XPY = \angle CPY - \angle CPQ = \alpha - \frac{\pi}{2} + C$ 。于是

$$PY \text{ 平分 } AX \iff AP \sin \angle APY = XP \sin \angle XPY \iff AP \cos \alpha = -XP \cos(C + \alpha), \quad (1)$$

$$\text{因为 } AP = b \cos A, \quad XP = BP \cdot \frac{\sin B}{\sin(C - B)} = \frac{a \cos B \sin B}{\sin(C - B)},$$

$$\text{所以 } (1) \text{ 式 } \iff \sin C \tan \alpha - \cos C = \frac{AP}{XP} = \frac{\sin(C - B)}{\cos B} \cot A \iff \sin C \tan \alpha = \frac{1}{\cos B \sin A}$$

$$\cdot (\sin C \cos B \cos A - \cos C \sin B \cos A + \cos C \cos B \sin A) = \frac{\sin B}{\cos B \sin A} (\cos B - \cos C \cos A), \quad (2)$$

设 $\angle CAX = \beta$, $XU \perp AC$ 于 U , 则 $\tan \beta = \frac{XU}{AU} = \frac{CX \sin C}{b + CX \cos C}$, $d(N, CX) = \frac{CX}{2 \tan \beta}$,

$$\tan \alpha = \frac{d(N, CX)}{\frac{a}{2} + \frac{CX}{2}} = \frac{CX}{\tan \beta (a + CX)} = \frac{b + CX \cos C}{\sin C (a + CX)},$$

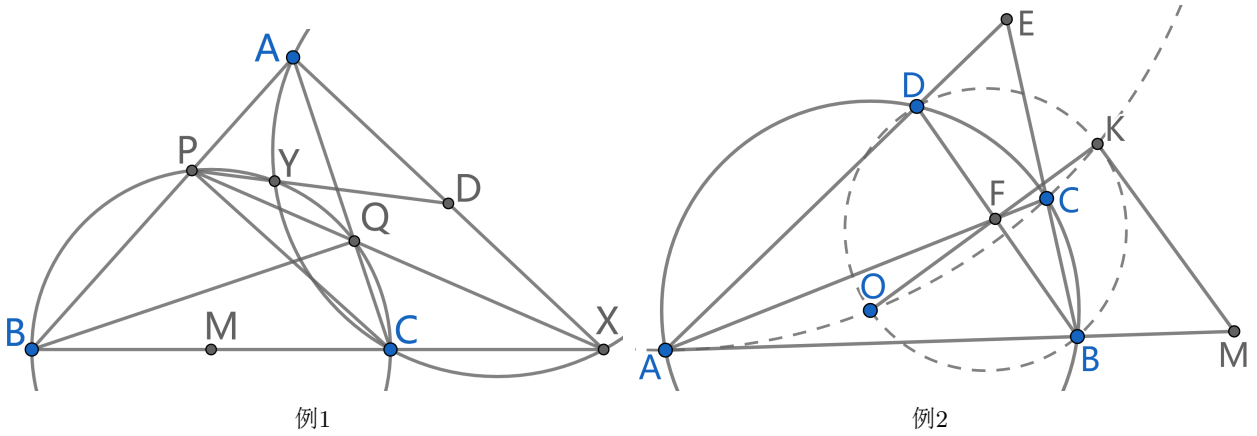
$$\begin{aligned} \text{因为 } CX &= CQ \frac{\sin \angle CQX}{\sin \angle CXQ} = a \cos C \frac{\sin B}{\sin(C - B)}, \quad \text{所以 } \sin C \tan \alpha = \frac{b + CX \cos C}{a + CX} \\ &= \frac{\sin B \sin(C - B) + \sin A \cos^2 C \sin B}{\sin A \sin(C - B) + \sin A \cos C \sin B} = \frac{\sin B}{\sin A} \cdot \frac{\sin(C - B) + \sin A \cos^2 C}{\sin C \cos B}, \quad (3) \end{aligned}$$

因为 $\sin(C - B) + \sin A \cos^2 C = \sin C \cos B + \cos C(-\sin B + \sin A \cos C) = \sin C(\cos B - \cos A \cos C)$, 所以(3)式右边=(2)式右边, (2), (1)式成立, PY 平分 AX 。

法三 (何高乐): 设 PY 交 AX 于点 D , 因为 $\angle APD = \angle BCY = \angle YAD$, 所以 $\triangle APD \sim \triangle YAD$, $DA^2 = DY \cdot DP$ 。因为 $\angle DXY = \angle ACY = \angle DPX$, 所以 $\triangle DXY \sim \triangle DPX$, $DX^2 = DY \cdot DP = DA^2$, 于是 D 为 AX 中点。□

例 3.2. 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, 直线 CD 交 AB 于 M ($MB < MA, MC < MD$), K 是 $\odot(AOC)$ 与 $\odot(DOB)$ 除点 O 外的另一个交点。求证: $\angle MKO = \frac{\pi}{2}$ 。

证. 因为 $AO = CO$, 所以 $\angle AKO = \angle ACO = \angle CAO = \angle CKO$, 同理, $\angle BKO = \angle BDO = \angle DBO = \angle DKO$ 。 $\angle AKD = \angle DKO - \angle AKO = \angle DBO - \angle ACO = (\frac{\pi}{2} - \angle BAD) - (\frac{\pi}{2} - \angle ABC) = \angle ABC - \angle BCM = \angle AMD$, 所以 A, D, K, M 四点共圆。同理, $\angle BKC = \angle BKO - \angle CKO = \angle BMC$, 所以 B, C, K, M 四点共圆。设 AD, BC 交于点 E , 由四边形的密克定理, K 是四边形 $ABCD$ 的密克点, A, B, K, E 四点共圆, C, D, K, E 四点共圆, 且 E, K, M 三点共线。所以 $\angle CKM = \angle CBA = \angle EKA$, 又因为 $\angle AKO = \angle CKO$, 所以 $\angle MKO = \angle CKM + \angle CKO = \frac{1}{2} \angle EKM = \frac{\pi}{2}$ 。□

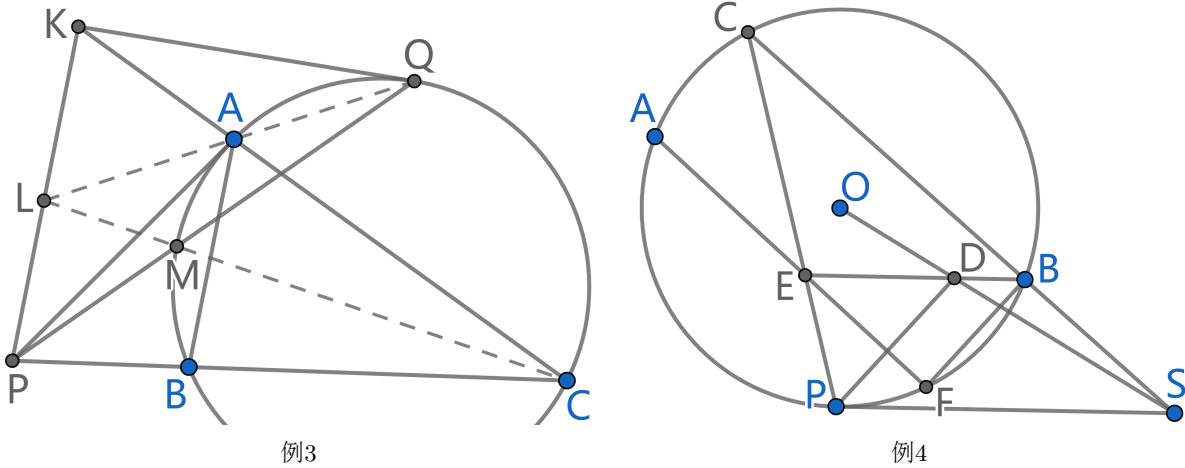


例 3.3. 圆 ω 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, M 是弧 AB 的中点, 过 A 作 ω 的切线交直线 BC 于 P , 直线 PM 交 ω 于 Q (异于 M), 过 Q 作 ω 的切线交 AC 于 K . 求证: $AB \parallel PK$.

证. 法一: 因为 $\triangle KAQ \sim \triangle KQC$, 所以 $\frac{KA}{KC} = \frac{KA}{KQ} \cdot \frac{KQ}{KC} = \left(\frac{AQ}{CQ}\right)^2$. 因为 $\triangle PMA \sim \triangle PAQ$, 所以 $\frac{AQ}{AM} = \frac{PA}{PM}$. 因为 $\triangle PBM \sim \triangle PQC$, 所以 $\frac{BM}{CQ} = \frac{PM}{PC} \cdot \frac{AQ}{AM} = \frac{AQ}{AM} \cdot \frac{BM}{CQ} = \frac{PA}{PM} \cdot \frac{PM}{PC} = \frac{PA}{PC}$. 因为 $PA^2 = PB \cdot PC$, 所以 $\frac{KA}{KC} = \left(\frac{AQ}{CQ}\right)^2 = \left(\frac{PA}{PC}\right)^2 = \frac{PB}{PC}$, 于是 $AB \parallel PK$.

法二: 设 CM 交 AQ 于 L , 直线 AB 的无穷远点为 ∞_{AB} . 由帕斯卡定理, 考察圆内接六边形 $AACMQQ$, 有 P, L, K 三点共线; 考察圆内接六边形 $ABCMMQ$, 有 P, L, ∞_{AB} 三点共线. 所以 P, L, K, ∞_{AB} 四点共线, $PK \parallel AB$.

注: 本题中 M 既可以是劣弧 AB 的中点, 也可以是优弧 AB 的中点. □



例 3.4. 过以 AB 为直径的 $\odot O$ 外一点 S 作该圆的切线 SP , P 为切点, 直线 SB 与 $\odot O$ 相交于 B 和 C , 过 B 作 PS 的平行线, 分别与直线 OS , PC 相交于 D 和 E , 延长 AE 与 $\odot O$ 相交于 F . 求证: $PD \parallel BF$.

证. □

例 3.5 (加强的欧拉不等式). 回忆: 设 $\triangle ABC$ 的外心、内心分别为 O, I , 则由欧拉定理, 我们有 $R^2 - 2Rr =$

$OI^2 \geq 0$, $R \geq 2r$ 。试证明下列不等式, 它比上述欧拉不等式更强:

$$\frac{R}{r} \geq \frac{abc + a^3 + b^3 + c^3}{2abc} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - 1 \geq \frac{2}{3} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) \geq 2, \quad (1)$$

证. (1) 设 $p = \frac{a+b+c}{2}$, $x = p - a$, $y = p - b$, $z = p - c$, 则 $x, y, z > 0$, $a = y + z$, $b = x + z$, $c = x + y$ 。
由 $S = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{pxyz}$, 我们有

$$\frac{R}{r} = \frac{abc/4S}{r} = \frac{abc p}{4S^2} = \frac{abc p}{4pxyz} = \frac{abc}{4xyz}, \quad (1) \text{式最左侧的不等号}$$

$$\iff (abc)^2 \geq 2xyz(abc + \sum a^3) \iff \prod(x+y)^2 \geq 2xyz(\prod(x+y) + \sum(x+y)^3), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (2) \text{式左边} &= (\sum x^2 y + \sum xy^2 + 2xyz)^2 = (\sum x^2 y)^2 + (\sum xy^2)^2 + 4x^2 y^2 z^2 + 2(\sum x^2 y)(\sum xy^2) \\ &\quad + 4xyz(\sum x^2 y + \sum xy^2), \quad (2) \text{式右边} = 2xyz(4\sum x^2 y + 4\sum xy^2 + 2xyz + 2\sum x^3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{式左边} - \text{右边} &= (\sum x^2 y)^2 + (\sum xy^2)^2 + 2(\sum x^2 y)(\sum xy^2) - 4xyz(\sum x^3 + \sum x^2 y + \sum xy^2) \\ &= \sum x^4 y^2 + 2\sum x^2 y^3 z + \sum x^4 z^2 + 2\sum xy^3 z^2 + 2\sum x^3 y^3 + 2\sum x^4 yz + 6x^2 y^2 z^2 \\ &\quad - 4xyz(\sum x^3 + \sum x^2 y + \sum xy^2) = \sum x^4 y^2 + \sum x^4 z^2 + 2\sum x^3 y^3 + 6x^2 y^2 z^2 \\ &\quad - 2xyz(\sum x^3 + \sum x^2 y + \sum xy^2) = \prod(x-y)^2 + 4\sum x^3 y^3 - 4xyz(\sum x^2 y + \sum xy^2) + 12x^2 y^2 z^2, \quad (3) \end{aligned}$$

我们在最后一步中使用了 $\prod(x-y)^2 = (\sum x^2 y - \sum xy^2)^2 = (\sum x^2 y)^2 + (\sum xy^2)^2 - 2(\sum x^2 y)(\sum xy^2) = \sum x^4 y^2 + \sum x^2 y^4 + 2xyz(\sum x^2 y + \sum xy^2) - 2\sum x^3 y^3 - 6x^2 y^2 z^2 - 2xyz \sum x^3$ 。由舒尔不等式,

$$\sum x^3 y^3 - xyz(\sum x^2 y + \sum xy^2) + 3x^2 y^2 z^2 = \sum xy(xy - xz)(xy - yz) \geq 0,$$

所以(3)式右边 ≥ 0 , (2) 式和(1)式最左侧的不等号成立。

$$(2) \quad (1) \text{式左数第二个不等号} \iff \sum a^3 + 3abc \geq \sum a^2 c \iff$$

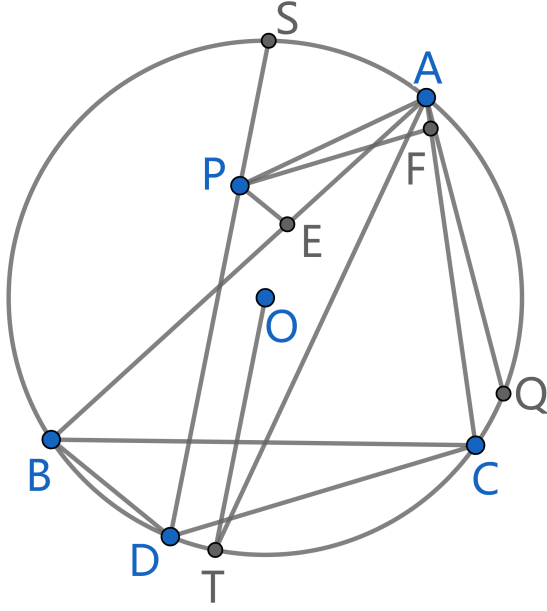
$$\begin{aligned} \sum(x+y)^3 + 3\prod(x+y) &\geq 2\sum(y+z)^2(x+y) \quad (4), \quad (4) \text{式左边} - \text{右边} = 2\sum x^3 + 6\sum x^2 y \\ &\quad + 6\sum xy^2 + 6xyz - 2(\sum x^3 + 2\sum xy^2 + 3\sum xz^2 + 6xyz) = 2\sum xy^2 - 6xyz \geq 0, \end{aligned}$$

所以(1)式左数第二个不等号成立。

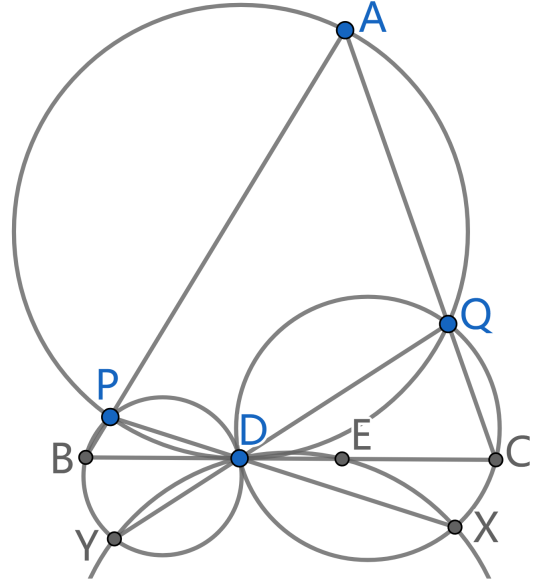
$$(3) \quad (1) \text{式右侧两个不等号即均值不等式}, \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3. \quad \square$$

例 3.6. 设 $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, D 是弧 \widehat{BC} (不含 A) 上的一点, S 是弧 \widehat{BAC} 的中点。 P 为线段 SD 上一点, 过 P 作 DB 的平行线交 AB 于点 E , 过 P 作 DC 的平行线交 AC 于点 F , 过 O 作 SD 的平行线交弧 \widehat{BDC} 于点 T 。已知 $\odot O$ 上的点 Q 满足 $\angle QAP$ 被 AT 平分, 求证: $QE = QF$ 。

证. $\frac{PD}{EB} = \frac{\sin \angle ABD}{\sin \angle SDB} = \frac{AD}{SB}$, 同理, $\frac{PD}{CF} = \frac{AD}{SC}$ 。又因为 $\angle PDA = \angle EBS = \angle FCS$, $SB = SC$, 所以 $\triangle PDA \sim \triangle EBS \cong \triangle FCS$, $\angle SDQ = \angle SDT - \angle QDT = \pi - \angle OTD - \angle PAT = \frac{\pi}{2} + \angle DAT - \angle PAT = \frac{\pi}{2} - \angle PAD$, $\angle QSO - \frac{\pi}{2} - \angle SDQ = \angle PAD = \angle ESB = \angle(\widehat{EF}, BC)$ 。因为 $SO \perp BC$, 所以 $QS \perp EF$, 因为 $SE = SF$, 所以 QS 是 EF 的中垂线, $QE = QF$ 。 \square



例6



例7

例 3.7. 设四边形 $APDQ$ 内接于圆 Γ ，过 D 作 Γ 的切线与直线 AP, AQ 分别交于 B, C 两点。延长 PD 交 $\triangle CDQ$ 的外接圆于点 X ，延长 QD 交 $\triangle BDP$ 的外接圆于点 Y 。设 $\triangle DXY$ 的外接圆交 BC 于点 D, E ，求证： $BD = CE$ 。

证. $\angle BYD = \angle DPA = \angle DQC$ ，所以 $BY \parallel AC$ ，同理， $CX \parallel AB$ 。设 BY 与 CX 交于 A' ，则 $ABA'C$ 为平行四边形， $\angle A' + \angle XDY = \angle A + \angle PDQ = \pi$ ， D, X, A', Y 四点共圆。又因为 $CQ \cdot AC = CD^2$ ，所以 $BD \cdot BE = BY \cdot BA' = CQ \cdot \frac{BD}{CD} \cdot AC = BD \cdot CD$ ， $BE = CD$ 。 \square

例 3.8. 设凸四边形 $ABCD$ 满足 $\angle ABC > \frac{\pi}{2}$ ， $\angle CDA > \frac{\pi}{2}$ ， $\angle DAB = \angle BCD$ 。记 E, F 分别为点 A 关于直线 BC, CD 的对称点。设线段 AE, AF 分别与直线 BD 交于点 K, L 。求证： $\triangle BEK$ 和 $\triangle DFL$ 的外接圆相切。

证. 法一：设 $\angle ABD = B_1$ ， $\angle CBD = B_2$ ， $\angle ADB = D_1$ ， $\angle CDB = D_2$ ， $\angle ABC = B$ ， $\angle ADC = D$ ， $\triangle BEK, \triangle DFL$ 的外心分别为 O_1, O_2 ， $\odot O_1, \odot O_2$ 的半径分别为 r_1, r_2 ，则

$$r_1 = \frac{BE}{2 \sin \angle BKE} = \frac{AB}{2 \sin(\frac{\pi}{2} + B_2)} = \frac{AB}{2 \cos B_2}, \quad \text{同理, } r_2 = \frac{AD}{2 \cos D_2},$$

设 BK, DL 的中点分别为 U, V ，则 $O_1U = r_1 \cos \angle BEK = r_1 \cos(B - \frac{\pi}{2}) = r_1 \sin B$ ， $BU = r_1 \sin \angle BEK = -r_1 \cos B$ 。同理， $O_2V = r_2 \sin D$ ， $DV = -r_2 \cos D$ ，

$$\begin{aligned} O_1O_2^2 &= UV^2 + (O_2V - O_1U)^2 = (BD - r_1 \cos B - r_2 \cos D)^2 + (r_1 \sin B - r_2 \sin D)^2 \\ &= r_1^2 + r_2^2 + BD^2 + 2r_1r_2 \cos(B + D) - 2BD(r_1 \cos B + r_2 \cos D), \end{aligned}$$

只需证明上式右边 $= (r_1 + r_2)^2$ ①。因为 $B + D = 2\pi - 2A$ ，所以①式 \iff

$$4r_1r_2 \sin^2 A = BD^2 - 2BD(r_1 \cos B + r_2 \cos D) \quad \text{②,} \quad \text{由正弦定理, } \frac{BD}{\sin A} = \frac{AB}{\sin D_1} = \frac{AD}{\sin B_1},$$

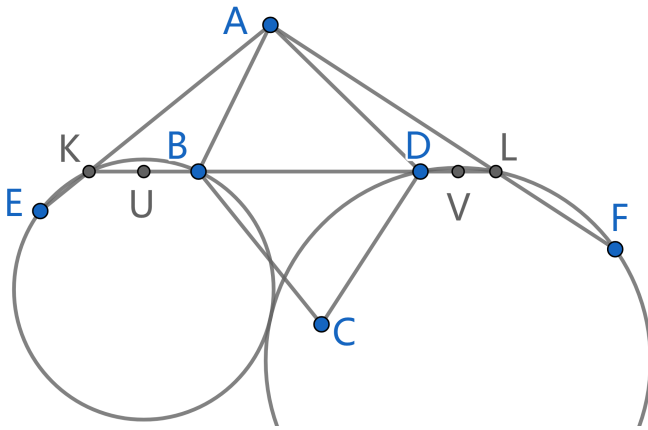
$$\text{所以②式} \iff \frac{\sin B_1 \sin D_1}{\cos B_2 \cos D_2} \cdot \sin A = \sin A - \left(\frac{\sin D_1 \cos B}{\cos B_2} + \frac{\sin B_1 \cos D}{\cos D_2} \right),$$

$$\Leftrightarrow \sin A(\cos B_2 \cos D_2 - \sin B_1 \sin D_1) = \sin D_1 \cos D_2 \cos B + \sin B_1 \cos B_2 \cos D, \quad (3)$$

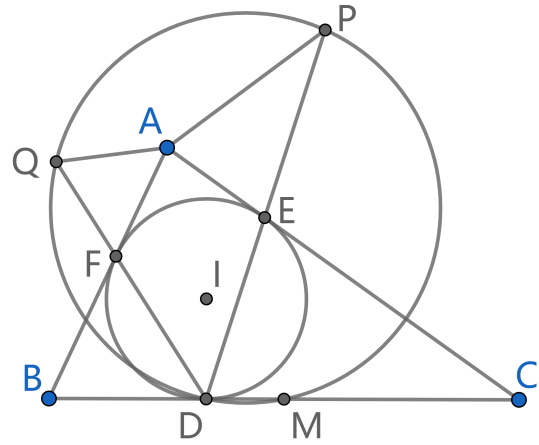
$$\begin{aligned} (3) \text{式右边} &= \sin D_1 \cos D_2 (\cos B_1 \cos B_2 - \sin B_1 \sin B_2) + \sin B_1 \cos B_2 (\cos D_1 \cos D_2 - \sin D_1 \sin D_2) \\ &= \cos B_2 \cos D_2 \sin(B_1 + D_1) - \sin B_1 \sin D_1 \sin(B_2 + D_2) = (3) \text{式左边}, \end{aligned}$$

所以③, ②, ①式都成立, $O_1O_2 = r_1 + r_2$, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切。

法二 (何高乐): 设 BC 交 AE 于点 G , CD 交 AF 于点 H , 则 G 为 AE 中点, H 为 AF 中点。因为 $\angle BEA = \angle BAE$, $BK = BK$, 所以 $\odot(ABK)$ 与 $\odot(EBK)$ 半径相同。同理, $\odot(ADL)$ 与 $\odot(FDL)$ 半径相同。于是 $\odot(ABK)$ 与 $\odot(EBK)$ 关于 KL 对称, $\odot(ADL)$ 与 $\odot(FDL)$ 关于 KL 对称。只需证明 $\odot(ABK)$ 与 $\odot(ADL)$ 在 A 处相切④。过 A 作 $\odot(ABK)$ 的切线交 KL 于 M 点, 则 $\angle BAM = \angle AKB$ 。又因为 $\angle AKL + \angle ALK = \pi - \angle GAH = \angle BCD$, 所以 $\angle MAD = \angle BAD - \angle MAB = \angle BCD - \angle AKL = \angle ALM$, MA 与 $\odot(ADL)$ 切于 A 点, 命题④成立。 \square



例8



例9

例 3.9. 不等边 $\triangle ABC$ 的内切圆与边 BC, CA, AB 分别相切于点 D, E, F 。在 $\triangle ABC$ 外部构造 $\triangle APE, \triangle AQF$, 使得 $AP = PE, AQ = QF, \angle APE = \angle ACB, \angle AQF = \angle ABC$ 。设 M 是边 BC 的中点, 请用 $\triangle ABC$ 的三个内角来表示 $\angle QMP$ 。

证. 因为 $\angle QFA = \angle QAF = \frac{\pi - B}{2} = \angle BFD$, 所以 Q, F, D 三点共线。同理, P, E, D 三点共线。 $QF = \frac{AF}{2 \sin \frac{B}{2}} = 2R \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2}$, 同理, $PE = 2R \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2}$ 。 $DF = 2BD \sin \frac{B}{2} = 2r \cos \frac{B}{2}$, 同理, $DE = 2r \cos \frac{C}{2}$ 。 $DQ = DF + FQ = 2R \sin \frac{C}{2} (\cos \frac{A}{2} + 2 \sin \frac{A}{2} \sin B)$, $DP = 2R \sin \frac{B}{2} (\cos \frac{A}{2} + 2 \sin \frac{A}{2} \sin C)$ 。设 $\angle EDF = \frac{\pi - A}{2}$, $\alpha = \angle EDC = \frac{\pi - C}{2}$, 我们证明 $\tan \angle DQP = \tan \angle PMC$ ①。 \square

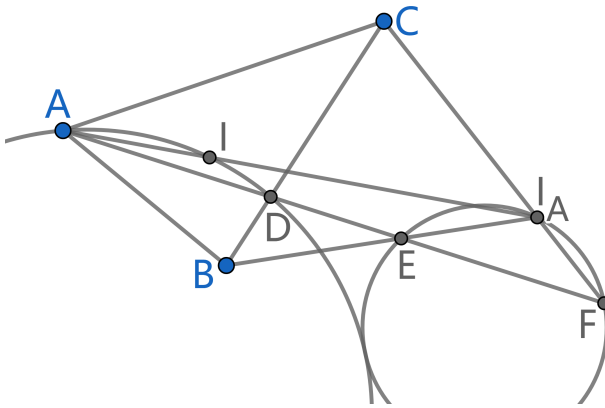
例 3.10. 设锐角 $\triangle ABC$ 的内心为 I , 点 A 所对的旁心为 I_A 。若 $AB < AC$, 设 D 为 $\triangle ABC$ 内切圆与边 BC 的切点, 直线 AD 直线 BI_A, CI_A 分别交于点 E, F 。求证: $\odot(AID)$ 与 $\odot(AID), \odot(I_AEF)$ 相切。

证. 设 $\triangle AID$ 外接圆为 ω , t_E, t_F, t_{I_A} 分别为 E, F, I_A 到 ω 的切线长, $\angle BAD = \alpha, \angle CAD = \beta$ 。则由开世定理, 只需证明 $I_A F \cdot t_E + I_A E \cdot t_F = EF \cdot t_{I_A}$, 即 $\sin(\frac{B}{2} - \alpha)t_E + \sin(\frac{C}{2} - \beta)t_F = \sin \frac{B+C}{2} t_{I_A}$ ①。

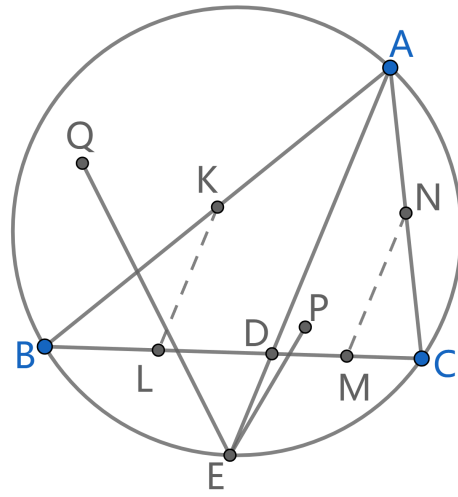
$$t_E^2 = ED \cdot EA = BD \cdot \frac{\sin \frac{\pi - B}{2}}{\sin(\frac{B}{2} - \alpha)} \cdot AB \cdot \frac{\sin \frac{\pi + B}{2}}{\sin(\frac{B}{2} - \alpha)} = (p - b)c \cdot \frac{\cos^2 \frac{B}{2}}{\sin^2(\frac{B}{2} - \alpha)},$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{B}{2} - \alpha\right)t_E &= \sqrt{(p-b)c} \cos \frac{B}{2}, & \text{同理, } \sin\left(\frac{C}{2} - \beta\right)t_F &= \sqrt{(p-c)b} \cos \frac{C}{2}, \\ t_{I_A}^2 &= I_A I \cdot I_A A = \frac{a}{\sin \frac{\pi+A}{2}} \cdot \frac{p}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{pa}{\cos^2 \frac{A}{2}}, & \cos \frac{A}{2} t_{I_A} &= \sqrt{pa}, \\ \text{①式} &\iff \sqrt{(p-b)c} \cos \frac{B}{2} + \sqrt{(p-c)b} \cos \frac{C}{2} = \sqrt{pa}, & \text{②} & \\ \frac{p-b}{p} &= \frac{4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{B}{2}}{4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} \cos \frac{B}{2}} = \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2}, & \sqrt{\frac{(p-b)c}{pa}} &= \sqrt{\tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} \frac{\sin C}{\sin A}} = \frac{\sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}, \\ \text{同理, } \sqrt{\frac{(p-b)c}{pa}} &= \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2}}, & \text{②式左边} &= (\sin \frac{C}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}) / \cos \frac{A}{2} = 1, \\ & & \text{②式右边} & \end{aligned}$$

所以②, ①式成立, ω 与 $\triangle I_A EF$ 的外接圆相切。 □



例10



例11

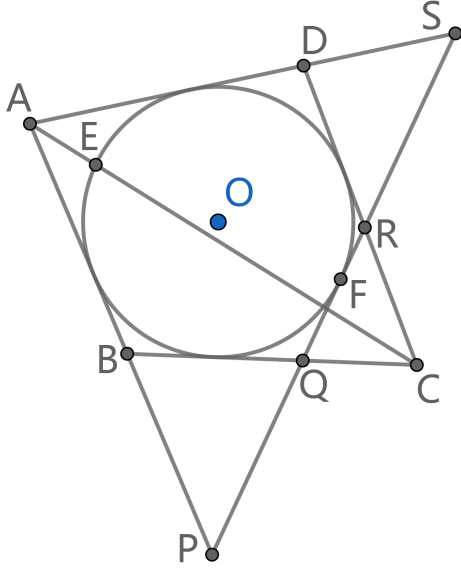
例 3.11. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$ 的平分线交 BC 于点 D , 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 E 。设 K, L, M, N 分别为 AB, BD, DC, CA 的中点, P, Q 分别是 $\triangle EKL, \triangle EMN$ 的外心。求证: $\angle PEQ = A$ 。

证. $\angle PEA = \angle PEL - \angle LEA = \frac{\pi}{2} - \angle LKE - (\pi - \angle ELK) = \angle ELK - \angle LKE - \frac{\pi}{2}$, 同理, $\angle QEA = \angle EMN - \angle MNE - \frac{\pi}{2}$. $\angle PEQ = A \iff A = \angle ELK + \angle EMN - \angle LKE - \angle MNE - \frac{\pi}{2} = \angle ELM + \angle EML - \angle KEA - \angle NEA = \pi - \angle LEM - \angle KEN$ ①. 设 A, D 关于 E 的对称点分别为 A', D' , 则 $\angle LEM = \angle BD'C$, $\angle KEN = \angle BA'C$. 因为 $BE^2 = ED \cdot EA = ED' \cdot EA'$, 所以 $\triangle EBD' \sim \triangle EA'B$, 同理, $\triangle ECD' \sim \triangle EA'C$, ①式右边 $= \pi - (\angle BD'E + \angle BA'E) - (\angle CD'E + \angle CA'E) = \pi - \angle BEA - \angle AEC = A$, ①式成立。 □

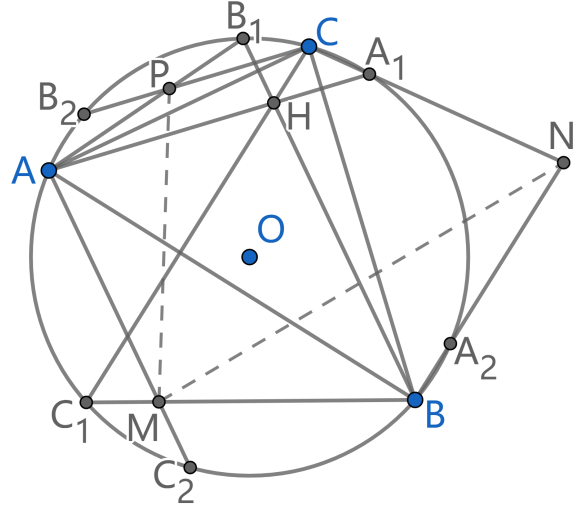
例 3.12. 四边形 $ABCD$ 外切于圆 ω , 设 E 是 AC 与 ω 的交点中离 A 较近的那一个, F 是 E 在 ω 上的对径点。设 ω 过 F 的切线与直线 AB, BC, CD, DA 分别交于点 P, Q, R, S 。求证: $PQ = RS$ 。

证. □

例 3.13. 设 O, H 分别是锐角 $\triangle ABC$ 的外心和垂心, Γ 是其外接圆。延长 AH, BH, CH 分别交 Γ 于点 A_1, B_1, C_1 , 过 A_1, B_1, C_1 分别作 BC, CA, AB 的平行线与 Γ 再交于点 A_2, B_2, C_2 。设 M, N, P 分别是 AC_2 与 BC_1 , BA_2 与 CA_1 , CB_2 与 AB_1 的交点。求证: $\angle MNB = \angle AMP$ 。



例12



例13

证. $\angle MBN = \frac{\pi}{2} + \angle MBA = \pi - A$, 同理, $\angle PAM = \pi - C$. $AM = BM = \frac{c}{2 \sin A}$, $AP = \frac{b}{2 \sin C}$, $BN = \frac{a}{2 \sin B}$. 我们证明 $\tan \angle MNB = \tan \angle AMP$, 即 $\frac{BM \sin A}{BN + BM \cos A} = \frac{AP \sin C}{AM + AP \cos C}$ ①. ①式 \Leftrightarrow

$$\frac{c}{\frac{a}{\sin B} + \frac{c}{\sin A} \cos A} = \frac{b}{\frac{c}{\sin A} + \frac{b}{\sin C} \cos C} \Leftrightarrow \frac{c \sin B \sin A}{a \sin A + c \cos A \sin B} = \frac{b \sin A \sin C}{c \sin C + b \cos C \sin A}, \quad ②$$

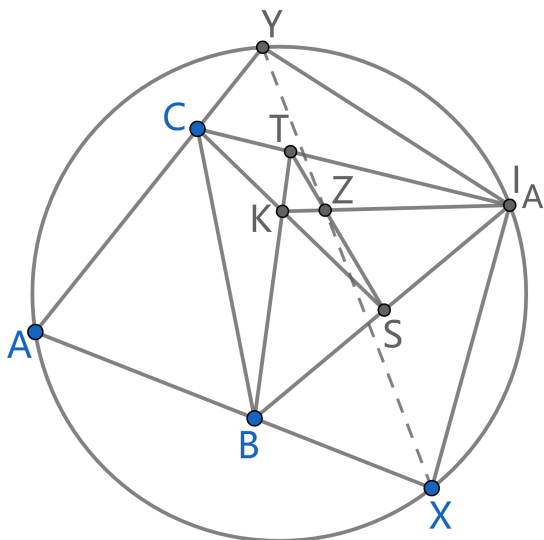
因为 $c \sin B \sin A = b \sin A \sin C$, $a \sin A + c \cos A \sin B - c \sin C - b \cos C \sin A = \sin A(a - b \cos C) - c(\sin C - \cos A \sin B) = \sin A \cdot c \cos B - c \sin A \cos B = 0$, 所以②式成立, ①式成立, $\angle MNB = \angle AMP$. \square

例 3.14. $\triangle ABC$ 中, I_A 是点A所对的旁心. 一个经过A, I_A 的圆与AB, AC的延长线分别交于点X, Y. 线段 $I_A B$ 上一点S满足 $\angle CSI_A = \angle AYI_A$, 线段 $I_A C$ 上一点T满足 $\angle BTI_A = \angle AXI_A$. 设K是BT, CS的交点, Z是ST, $I_A K$ 的交点. 求证: X, Y, Z三点共线.

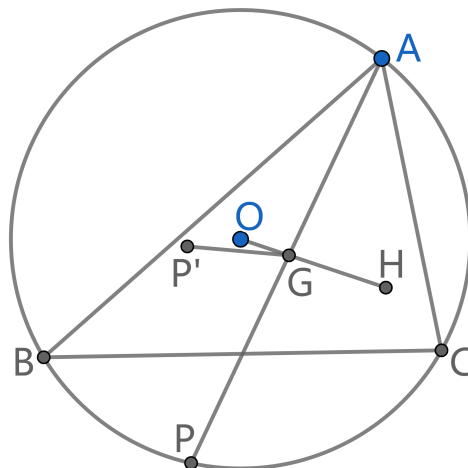
证. 由共边定理, $\frac{TZ}{ZS} = \frac{[KTI_A]}{[KSI_A]} = \frac{[KTI_A]}{[STI_A]} \cdot \frac{[STI_A]}{[KSI_A]} = \frac{KC}{SC} \cdot \frac{TB}{KB} = \frac{[CTB]}{[CSB]} = \frac{CT \cos \frac{C}{2}}{BS \cos \frac{B}{2}}$. 因为 $\angle YCI_A = \angle TCB$, $\angle CTB = \pi - \angle BTI_A = \pi - \angle BXI_A = \angle CYI_A$, 所以 $\triangle CYI_A \sim \triangle CTB$, $\triangle CYT \sim \triangle CI_A B$. 同理, $\triangle BXI_A \sim \triangle BSC$, $\triangle BXS \sim \triangle BI_A C$. 所以 $YT = I_A B \cdot \frac{CT}{a}$, $XS = I_A C \cdot \frac{BS}{a}$, $\frac{YT}{XS} = \frac{CT}{BS} \cdot \frac{I_A B}{I_A C} = \frac{CT}{BS} \cdot \frac{\cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{B}{2}} = \frac{TZ}{ZS}$. 因为 $\angle KTI_A + \angle KSI_A = \pi$, 所以K, T, I_A , S四点共圆, $\angle ZTY = 2\pi - \angle CTY - \angle CTB - \angle BTS = 2\pi - \frac{\pi - B}{2} - \angle CYI_A - \angle KI_A S$, $\angle ZSX = \angle BSX + \angle BSC + \angle CST = \frac{\pi - C}{2} + \angle BXI_A + \angle KI_A T = \angle ZTY$. 于是 $\triangle YTZ \sim \triangle XSZ$, $\angle YZT = \angle XZS$, X, Y, Z三点共线. \square

例 3.15 (2015, 欧洲女奥). 设H, G分别是锐角 $\triangle ABC$ ($AB \neq AC$)的垂心和重心, 直线AG与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于另一点P. 设P'是点P关于直线BC的对称点. 求证: $\angle A = \frac{\pi}{3}$ 当且仅当 $HG = GP'$.

证. \square



例14



例15

4 九点圆与欧拉线

例 4.1. 设锐角 $\triangle ABC$ 的外心和垂心分别为 O, H , 求证: $\triangle AOH, \triangle BOH, \triangle COH$ 中有一个的面积等于另外两个面积之和。

证.

□

例 4.2. 设 $\triangle ABC$ 的外心, 垂心分别为 O, H 。(1) 求证: $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ 。(2) 设 $\odot O$ 半径为 R , 求证: $OH < 3R$, 并证明右边的3不能改成更小的常数。

证.

□

例 4.3. O, N 分别为 $\triangle ABC$ 的外心与九点圆圆心, S 为 $\triangle BOC$ 的外心。求证: AS, AN 关于 $\angle A$ 的平分线对称。

证. 因为 $\frac{HN}{HO} = \frac{HM}{HA} = \frac{1}{2}$, 所以 $MN \parallel AO$, 又因为 $OS \parallel AH$, 所以 $\angle AMN = \pi - \angle MAO = \angle AOS$ 。由正弦定理, $\frac{AO}{OS} = \frac{BO}{OS} = 2 \sin \angle BCO = 2 \cos A$ 。又因为 $\frac{AM}{MN} = \frac{AH}{AO} = 2 \cos A = \frac{AO}{OS}$, 所以 $\triangle AOS \sim \triangle AMN$, $\angle BAS = \angle BAO + \angle OAS = \angle CAH + \angle HAN = \angle CAN$ 。 □

例 4.4. 设 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心, L 为 BC 边的中点, P 为 AH 的中点。过 L 作 PL 的垂线交 AB 于 G , 交 AC 的延长线于 K 。求证: G, B, K, C 四点共圆。

证.

□

例 4.5. 点 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心, 点 X, Y, Z 分别在线段 BC, CA, AB 上, $\triangle XYZ \sim \triangle ABC$ 。点 P, S 分别是 $\triangle XYZ$ 的垂心和外心。求证: $PS = SH$ 。

证. $\angle YAZ = \angle YXZ = \pi - \angle YPZ$, 所以 A, Y, P, Z 四点共圆。同理, B, Z, P, X 四点共圆, C, X, P, Y 四点共圆, $\angle PCX = \angle PYX = \frac{\pi}{2} - \angle YXZ = \angle PZX = \angle PBX$, 所以 $PB = PC$, 同理, $PA = PB = PC$ 。设 P 为 $\triangle ABC$ 的外心, BC, CA, AB 中点分别为 L, M, N , 则 $\triangle XYZ \sim \triangle ABC \sim \triangle LMN$, P 为 $\triangle LMN$ 的垂心。所以 $\angle NPL = \pi - \angle NML = \pi - B = \angle ZPX$, $\angle XPL = \angle ZPN$, 同理, $\angle ZPN = \angle YPM$,

设 PH 中点为 U , 则 U 是 $\triangle LMN$ 的外心, 所以 $\triangle PXL \sim \triangle PYM \sim \triangle PZM \sim \triangle PSU$, $\angle PUS = \angle PLX = \frac{\pi}{2}$, 由 $PU = UH$ 知 $PS = SH$. \square

例 4.6. 点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心, $\triangle ABC$ 的两条高 BE 和 CF 相交于 H , 直线 OH 与 EF 相交于 P . 线段 OK 是 $\odot(OEF)$ 的直径. 求证: A, K, P 三点共线.

证. $\angle AFK = \frac{\pi}{2}$, $\angle HFK = \angle OFH$, $\angle EFK = \frac{\pi}{2} - \angle OFE$, $\angle FEK = \frac{\pi}{2} - \angle DEF$, $\angle AEK = \frac{\pi}{2} - \angle AEO = \angle OEH$. 设 $\angle FAK = \alpha$, $\angle EAL = \beta$, 由角元塞瓦定理,

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \angle AFK}{\sin \angle EFK} \cdot \frac{\sin \angle FEK}{\sin \angle AEK} = \frac{\sin \angle OFH}{\cos \angle OFE} \cdot \frac{\cos \angle OEF}{\sin \angle OEH}, \quad (1)$$

设 $\alpha' = \angle FAP$, $\beta' = \angle EAP$, 则 $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in (0, \pi)$. 我们证明 $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \beta'}$ (2). 因为

$$\frac{FP}{EP} = \frac{AF \sin \alpha'}{AE \sin \beta'} \quad (3), \quad \frac{AF}{AE} = \frac{b}{c}, \quad \frac{FP}{EP} = \frac{[FOH]}{[EOH]} = \frac{FH \cdot OF \sin \angle OFH}{EH \cdot OE \sin \angle OEH}, \quad (4)$$

所以由(1),(3),(4)式, 我们有

$$\frac{\sin \alpha'}{\sin \beta'} = \frac{c \cdot FH \cdot OF \sin \angle OFH}{b \cdot EH \cdot OE \sin \angle OEH}, \quad (2) \text{式} \iff 1 = \frac{\cos \angle OFE \cdot c \cdot FH \cdot OF \sin \angle OFH}{\cos \angle OEF \cdot b \cdot EH \cdot OE \sin \angle OEH}, \quad (5)$$

我们有 $\frac{FH}{EH} = \frac{\sin \angle HEF}{\sin \angle HFE} = \frac{\cos B}{\cos C}$ (6). 因为 $AO \perp EF$, 所以

$$\frac{OF \cos \angle OFE}{OE \cos \angle OEF} = \frac{[AFO]}{[AEO]} = \frac{AF \sin \angle OAF}{AE \sin \angle OAE} = \frac{b \cos C}{c \cos B}, \quad (7)$$

由(6),(7)式知(5)式, (2)式成立. 又因为 $\alpha - \beta = \alpha' - \beta' = A \neq 0$, 所以 $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, A, K, P 三点共线. \square

例 4.7 (费尔巴哈定理). 设 $\triangle ABC$ 的九点圆为 $\odot N$, 内切圆为 $\odot I$. 求证: (1) $\odot N$ 与 $\odot I$ 内切. (2) 类似地, 设 $\triangle ABC$ 三个顶点 A, B, C 所对的旁切圆分别为 $\odot I_A, \odot I_B, \odot I_C$, 则 $\odot N$ 分别与 $\odot I_A, \odot I_B, \odot I_C$ 外切.

证. (1) 设 $\triangle ABC$ 外心为 O , 垂心为 H , 重心为 G . 只需证明 $NI = \frac{R}{2} - r$ (1). 设 $p = \frac{a+b+c}{2}$, $x = p - a$, $y = p - b$, $z = p - c$, 则由 G, I 的重心坐标, 我们有

$$\begin{aligned} \vec{OH} &= 3\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}, & \vec{OI} &= \frac{a}{a+b+c}\vec{OA} + \frac{b}{a+b+c}\vec{OB} + \frac{c}{a+b+c}\vec{OC}, \\ \vec{IN} &= \frac{1}{2}\vec{OH} - \vec{OI} = \frac{1}{2p}(x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}) \quad (2), & \text{因为} \frac{x}{p} &= \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}, \\ \frac{y}{p} &= \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2}, & \frac{z}{p} &= \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}, & \text{所以(2)式右边} &= \frac{1}{2} \sum \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \vec{OA}, \\ IN^2 &= \frac{R^2}{4} \left[\sum \tan^2 \frac{B}{2} \tan^2 \frac{C}{2} + 2 \sum \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan^2 \frac{C}{2} \cos 2C \right], \quad (3) \end{aligned}$$

这里用到 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = R^2 \cos 2C$. 因为 $\cos 2C = 1 - 2\sin^2 C$, 所以

$$\begin{aligned} (3) \text{式右边括号内} &= \left(\sum \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \right)^2 - 4 \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \left(\sum \tan \frac{C}{2} \sin^2 C \right), \quad (4) \\ &\text{因为} \tan \frac{C}{2} \sin^2 C = (1 - \cos C) \sin C = \sin C - \frac{1}{2} \sin 2C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \sum \tan \frac{C}{2} \sin^2 C &= \sum \sin C - \frac{1}{2} \sum \sin 2C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - 2 \sin A \sin B \sin C, \\ \text{又因为 } \sum \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} &= 1, \quad \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \sin A \sin B \sin C = 8 \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} \\ \text{所以④式右边} &= 1 - 16 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + 64 \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} = (1 - 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2})^2, \end{aligned}$$

于是 $IN = \frac{R}{2}(1 - 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}) = \frac{R}{2} - r$, ①式成立。 \square

5 复数的定义和性质

例 5.1. (1) 求证: $a \times b$ 的长方形可以用 $1 \times n$ 的长条覆盖, 当且仅当 $n \mid a$ 或 $n \mid b$;

(2) 空间中 $a \times b \times c$ 的盒子可以用 $n \times 1 \times 1$ 的长条装满, 求证: $n \mid a$ 或 $n \mid b$ 或 $n \mid c$ 。

证. (1) 假设 $a \times b$ 的长方形可以用 $1 \times n$ 的长条覆盖。设 $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ 为 n 次单位方根, 给大长方形每格按行列数建立坐标, 给坐标为 (p, q) , $1 \leq p \leq a$, $1 \leq q \leq b$ 的格子赋值 ω^{p+q} 。设某个 $1 \times n$ 的长条盖住的左上角方格坐标为 (p_0, q_0) , 则该长条覆盖的格子中的数之和为 $\omega^{p_0+q_0}(1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1}) = 0$, 所以大长方形中所有数之和为 0,

$$0 = \sum_{p=1}^a \sum_{q=1}^b \omega^{p+q} = \left(\sum_{p=1}^a \omega^p \right) \left(\sum_{q=1}^b \omega^q \right) = \omega \cdot \frac{1 - \omega^a}{1 - \omega} \cdot \omega \cdot \frac{1 - \omega^b}{1 - \omega}, \quad (1 - \omega^a)(1 - \omega^b) = 0,$$

所以 $1 - \omega^a = 0$ 或 $1 - \omega^b = 0$ 。因为 $1 - \omega^m = 0 \iff n \mid m$, 所以 $n \mid a$ 或 $n \mid b$ 。

(2) 给坐标为 (p, q, r) , $1 \leq p \leq a$, $1 \leq q \leq b$, $1 \leq r \leq c$ 的格子赋值 ω^{p+q+r} , 则每个长条盖住的格子中的数之和为 0, 盒子中所有数之和为 0,

$$0 = \sum_{p=1}^a \sum_{q=1}^b \sum_{r=1}^c \omega^{p+q+r} = \left(\sum_{p=1}^a \omega^p \right) \left(\sum_{q=1}^b \omega^q \right) \left(\sum_{r=1}^c \omega^r \right) = \omega \cdot \frac{1 - \omega^a}{1 - \omega} \cdot \omega \cdot \frac{1 - \omega^b}{1 - \omega} \cdot \omega \cdot \frac{1 - \omega^c}{1 - \omega},$$

所以 $(1 - \omega^a)(1 - \omega^b)(1 - \omega^c) = 0$, $1 - \omega^a = 0$ 或 $1 - \omega^b = 0$ 或 $1 - \omega^c = 0$, $n \mid a$ 或 $n \mid b$ 或 $n \mid c$ 。 \square

例 5.2. 设 $x, y, z > 0$, 求证: $\sum xy\sqrt{x^2 + y^2 + xy} \geq \prod \sqrt{x^2 + y^2 + xy}$ ①。

证. 法一: 设 $a = x$, $b = ye^{\frac{2\pi i}{3}}$, $c = ze^{-\frac{2\pi i}{3}}$, 则 $|a| = x$, $|b| = y$, $|c| = z$ 。由余弦定理,

$$\begin{aligned} |a - b| &= \sqrt{x^2 + y^2 + xy}, \quad |b - c| = \sqrt{y^2 + z^2 + yz}, \quad |c - a| = \sqrt{z^2 + x^2 + zx}, \\ \text{①式左边} &= |ab(a - b)| + |bc(b - c)| + |ca(c - a)| \geq |ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a)| \\ &= |(a - b)(b - c)(a - c)| = \text{①式右边}, \end{aligned}$$

所以①式成立。考察它的等号成立条件,

$$\text{法二: 原式} \iff \left(\sum xy\sqrt{x^2 + y^2 + xy} \right)^2 \geq \prod (x^2 + y^2 + xy) \quad \text{②}。$$

$$\text{②式左边} = \sum x^2 y^2 (x^2 + y^2 + xy) + 2xyz \sum \sqrt{(x^2 + y^2 + xy)(x^2 + z^2 + xz)} \cdot x,$$

$$\begin{aligned} \text{②式右边} &= (x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(z^2 + x^2) + \sum xy(z^2 + y^2)(z^2 + x^2) + \sum x^2 yz(y^2 + z^2) + x^2 y^2 z^2 \\ &= \sum x^4(y^2 + z^2) + \sum x^3 y^3 + \sum xyz^2(x^2 + y^2 + z^2) + xyz \sum x(y^2 + z^2) + 3x^2 y^2 z^2, \end{aligned}$$

$$\text{②式左边} - \text{右边} = xyz(2 \sum x\sqrt{(x^2 + y^2 + xy)(x^2 + z^2 + xz)} - (\sum x)(\sum x^2) - \sum x(y^2 + z^2) - 3xyz), \quad \text{③}$$

由柯西不等式, $\sqrt{(x^2 + y^2 + xy)(x^2 + z^2 + xz)} = \frac{1}{2}\sqrt{(x^2 + y^2 + (x+y)^2)(x^2 + z^2 + (x+z)^2)}$
 $\geq \frac{1}{2}(x^2 + yz + (x+y)(x+z)) = x^2 + yz + \frac{x(y+z)}{2}$, ④

所以③式右边括号 $\geq 2 \sum x(x^2 + yz + \frac{x}{2}(y+z)) - \sum x^3 - 2 \sum x(y+z) - 3xyz$
 $= \sum x^3 - \sum x(y+z) + 3xyz = \sum x(x-y)(x-z) \geq 0$,

上式最右边使用了Schur不等式。

注: ④式也可由 $\sqrt{(x^2 + y^2 + xy)(x^2 + z^2 + xz)} = \sqrt{((x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2)((x + \frac{z}{2})^2 + \frac{3}{4}z^2)} \geq (x + \frac{y}{2})(x + \frac{z}{2}) + \frac{3}{4}yz = x^2 + yz + \frac{x(y+z)}{2}$ 得到。 □

例 5.3. 求最小的实数 c , 使得对任意正整数 $n \geq 2$ 和任意 n 个和为 0 的非零复数 z_1, z_2, \dots, z_n , 均存在下标 $i \neq j$, 使得 $|z_i^2 + z_j^2| \leq c|z_i z_j|$ 。

解. c 最小为 $\frac{5}{2}$ 。原命题即对任意正整数 $n \geq 2$ 和 n 个和为 0 的非零复数 z_1, z_2, \dots, z_n , 都有 $c \geq \min_{i \neq j} \frac{|z_i^2 + z_j^2|}{|z_i z_j|}$ 。

(1) $c = \frac{5}{2}$ 时, 我们证明原命题成立。设 $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}, \sum_{i=1}^n z_i = 0$ 。不妨设 $|z_1| \geq |z_2| \geq \dots \geq |z_n|$, 若存在 $1 \leq i \leq n-1$, 使得 $|z_{i+1}| \geq \frac{1}{2}|z_i|$, 令 $j = i+1$, 则

$$0 \geq (|z_i| - \frac{1}{2}|z_j|)(|z_i| - 2|z_j|) = |z_i|^2 + |z_j|^2 - \frac{5}{2}|z_i z_j|, \quad |z_i^2 + z_j^2| \leq |z_i|^2 + |z_j|^2 \leq \frac{5}{2}|z_i z_j|,$$

原命题成立。否则对任意 $1 \leq i \leq n-1$, 都有 $|z_{i+1}| < \frac{1}{2}|z_i|$ 。所以 $2 \leq i \leq n$ 时, 有 $|z_i| \leq \frac{1}{2^{i-1}}|z_1|$, $|z_1| = |-\sum_{i=2}^n z_i| \leq \sum_{i=2}^n |z_i| < (\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i})|z_1| < |z_1|$, 矛盾!

(2) 再证明 $c < \frac{5}{2}$ 时, 原命题不成立。设 $n \geq 2$, $f_n(t) = \sum_{i=1}^{n-1} t^i, t \in \mathbb{R}_+$, 则 $f_n(t)$ 严格单调增且连续, $f_n(\frac{1}{2}) = 1 - 2^{1-n} < 1$, $f_n(1) = n - 1 \geq 1$, 所以在区间 $(\frac{1}{2}, 1]$ 上存在唯一的 λ_n 满足方程 $f_n(\lambda_n) = 1$ 。令 $z_1 = 1$, $2 \leq i \leq n$ 时, 令 $z_i = -\lambda_n^{i-1}$, 则 $\sum_{i=1}^n z_i = 1 - f_n(\lambda_n) = 0$ 。对任意 $1 \leq i, j \leq n, i \neq j$, $\frac{|z_i^2 + z_j^2|}{|z_i z_j|} = |\frac{z_i}{z_j} + \frac{z_j}{z_i}| = \lambda_n^{i-j} + \lambda_n^{j-i} \geq \lambda_n + \frac{1}{\lambda_n}$, $|i-j|=1$ 时等号成立, 于是 $\min_{i \neq j} \frac{|z_i^2 + z_j^2|}{|z_i z_j|} = \lambda_n + \frac{1}{\lambda_n}$ 。设 $m > n \geq 2$, 则 $1 = f_m(\lambda_m) = f_n(\lambda_n) < f_m(\lambda_n)$, 由 f_m 的单调性知 $\lambda_m < \lambda_n$, 数列 $\{\lambda_n\}_{n \geq 2}$ 单调减。特别地, $n \geq 3$ 时, $\lambda_n \leq \lambda_3 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$ 。 $1 = f_n(\lambda_n) = \frac{\lambda_n - \lambda_n^n}{1 - \lambda_n}$, $1 < 2\lambda_n = 1 + \lambda_n^n \leq 1 + \lambda_3^n$ 。因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_3^n = 0$, 由夹逼定理, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \frac{1}{2}$ 。于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n + \frac{1}{\lambda_n} = \frac{5}{2}$, 存在充分大的 n 使得 $c < \lambda_n + \frac{1}{\lambda_n}$, 上述例子说明原命题不成立。

综上所述, c 最小为 $\frac{5}{2}$ 。 □

例 5.4 (拿破仑定理). 以任意三角形的三边为底边向外 (或向内) 作三个正三角形, 则这三个正三角形的中心构成正三角形。

证. 我们先考虑向外作三个正三角形的情况。法一 (复数法): 设 $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}, \bar{\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}} = 1 - \alpha$, 并

以小写的 a 代表点 A 对应的复数, 其他点同理。则

$$p - c = \alpha(b - c), \quad p = \alpha b + \bar{\alpha}c, \quad \text{同理, } q = \alpha c + \bar{\alpha}a, \quad r = \alpha a + \bar{\alpha}b,$$

设 $\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\bar{\omega} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1 - \omega$, 我们证明 $r - p = \omega(q - p)$, 即 $r = \omega q + \bar{\omega}p \iff \alpha a + \bar{\alpha}b = \omega(\alpha c + \bar{\alpha}a) + \bar{\omega}(\alpha b + \bar{\alpha}c)$ ①。因为 $\omega\bar{\alpha} = \alpha$, $\bar{\omega}\alpha = \bar{\alpha}$, $\omega\alpha + \bar{\omega}\bar{\alpha} = \frac{i}{\sqrt{3}} - \frac{i}{\sqrt{3}} = 0$, 所以①式成立。

法二 (三角法): 在 $\triangle AQR$ 中, $AQ = \frac{b}{\sqrt{3}}$, $AR = \frac{c}{\sqrt{3}}$, $\angle QAR = A + \frac{\pi}{3}$ 。由余弦定理, 我们有

$$\begin{aligned} QR^2 &= \frac{1}{3}(b^2 + c^2 - 2bc \cos(A + \frac{\pi}{3})) = \frac{1}{3}(b^2 + c^2 - 2bc \cdot \frac{\cos A - \sqrt{3} \sin A}{2}) = \frac{1}{3}(b^2 + c^2 \\ &- bc(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} - \sqrt{3} \sin A)) = \frac{1}{3}(\frac{b^2 + c^2 + a^2}{2} + \sqrt{3}bc \sin A) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} + \frac{2[ABC]}{\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

这是关于 a, b, c 的对称式, 同理可得 $PQ^2 = PR^2 =$ 上式右边 $= QR^2$, 所以 $\triangle PQR$ 是正三角形。

向内作三个正三角形的证明如下: □

例 5.5 (2024, 高联预赛广西). 如图, $AD = CD$, $DP = EP$, $BE = CE$, $\angle ADC = \angle DPE = \angle BEC = \frac{\pi}{2}$ 。求证: P 为线段 AB 的中点。

证. 以小写的 a 代表点 A 对应的复数, 其他点同理。我们有

$$a - d = i(c - d), \quad (1 - i)d = a - ic, \quad d = \frac{1+i}{2}a + \frac{1-i}{2}c,$$

$$\text{同理, } c - e = i(b - e), \quad e = \frac{1+i}{2}c + \frac{1-i}{2}b, \quad e - p = i(d - p),$$

$$p = \frac{1+i}{2}e + \frac{1-i}{2}d = \frac{1+i}{2}(\frac{1+i}{2}c + \frac{1-i}{2}b) + \frac{1-i}{2}(\frac{1+i}{2}a + \frac{1-i}{2}c) = \frac{a+b}{2} + (\frac{i}{2} - \frac{i}{2})c = \frac{a+b}{2},$$

所以 P 是线段 AB 的中点。 □

例 5.6 (托勒密不等式). 在任意凸四边形 $ABCD$ 中, 求证: $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$ ①, 并说明等号成立当且仅当 A, B, C, D 四点共圆。

证. 由三角不等式, ①式左边 $= |a - b| \cdot |c - d| + |a - d| \cdot |b - c| \geq |(a - b)(c - d) + (a - d)(b - c)| = |(a - c)(b - d)| =$ ①式右边, 所以①式成立。等号成立当且仅当 $\arg((a - b)(c - d)) = \arg((a - d)(b - c))$, 即 $\arg(\frac{a-b}{a-d}) = \arg(\frac{c-d}{b-c}) \iff \angle BAD + \angle BCD = \pi \iff A, B, C, D$ 四点共圆。 □

例 5.7 (爱可尔斯定理). (1) 若 $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$ 都是正三角形且定向相同, 则线段 A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 的中点 A, B, C 也构成正三角形。(2) 若 $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$, $\triangle A_3B_3C_3$ 都是正三角形且定向相同, 则 $\triangle A_1A_2A_3, \triangle B_1B_2B_3, \triangle C_1C_2C_3$ 的重心也构成正三角形。

证. □

例 5.8. 点 A 在凸四边形 $SBCD$ 的内部, $AB = BC$, $AD = CD$, $\angle ASD = \angle BSC$ 。求证: $\frac{BS}{DS} = \frac{AB}{AD}$ 。

证. 设 AC 交 BD 于 O , 以 O 为原点, \overrightarrow{OD} 为实轴正半轴建立复平面, 以点记号的小写字母表示它对应的复数, 则 $c = \bar{a}$, $b, d \in \mathbb{R}$, $a + \bar{a} = 0$.

$$\begin{aligned} \angle ASD = \angle BSC &\iff \frac{(d-s)(b-s)}{(a-s)(c-s)} \in \mathbb{R} \iff \frac{(d-s)(b-s)}{(a-s)(\bar{a}-s)} = \frac{(d-\bar{s})(b-\bar{s})}{(\bar{a}-\bar{s})(a-\bar{s})}, \\ &\iff (|a|^2 + \bar{s}^2)(bd - (b+d)s + s^2) = (|a|^2 + s^2)(bd - (b+d)\bar{s} + \bar{s}^2), \quad \textcircled{1} \\ &\iff |a|^2((b+d)(\bar{s}-s) + s^2 - \bar{s}^2) = bd(s^2 - \bar{s}^2) + (b+d)(\bar{s}-s)|s|^2, \quad \text{因为 } \bar{s}-s \neq 0, \text{ 所以} \\ &\iff |a|^2(b+d-(s+\bar{s})) = -bd(s+\bar{s}) + (b+d)|s|^2 \quad \textcircled{2}, \quad \text{设 } s = x + yi, x, y \in \mathbb{R}, \\ &\quad b+d \neq 0 \text{ 时, } \textcircled{2} \text{ 式 } \iff x^2 + y^2 + (|a|^2 - bd) \cdot \frac{2x}{b+d} - |a|^2 = 0, \quad \textcircled{3} \end{aligned}$$

要证 $\frac{|s-b|}{|s-d|} = \frac{|a-b|}{|a-d|}$ ④, 即 $|s-b|^2|a-d|^2 = |s-d|^2|a-b|^2$,

$$\begin{aligned} &\iff (|s|^2 - b(s+\bar{s}) + b^2)(|a|^2 + d^2) = (|s|^2 - d(s+\bar{s}) + d^2)(|a|^2 + b^2), \\ &\iff |s|^2(d^2 - b^2) + |a|^2(b^2 - d^2) + |a|^2(s+\bar{s})(d-b) + bd(b-d)(s+\bar{s}) = 0, \\ &\iff |s|^2(d+b) + |a|^2(s+\bar{s}-b-d) - bd(s+\bar{s}) = 0, \quad \text{即 } \textcircled{2} \text{ 式,} \end{aligned}$$

所以④式成立, $\frac{BS}{DS} = \frac{AB}{AD}$. 注: $BO \neq DO$, 即 $b+d \neq 0$ 时, ③式就是到 B, D 两点距离比为 $\frac{AB}{AD}$ 的阿氏圆的方程. \square

6 几何选讲-3

例 6.1. 在 $\triangle ABC$ 中, I 是内心, 直线 AI 与 BC 交于点 D , 与 $\triangle ABC$ 外接圆交于另一点 M . $\triangle DBM$, $\triangle DCM$ 的内心分别为 J, K , 点 I 关于 J, K 的对称点为 P . 求证: $PB \perp PC$.

证. 因为 MJ 平分 $\angle BMI$, $MB = MI$, 所以 MJ 是 BI 的中垂线. J 为 $\triangle BIM$ 的外心, K 为 $\triangle CIM$ 的外心, P 为 $\odot J$ 与 $\odot K$ 除点 I 以外的另一个交点. \square

例 6.2 (1997, IMO 预选题). 已知 $\triangle ABC$ 的内心为 I , AI, BI, CI 分别交其外接圆 $\odot O$ 于点 K, L, M , R 在 AB 上, 满足 $RP \parallel AK$, $PB \perp BL$, $RQ \parallel BL$, $QA \perp AK$. 求证: MR, QL, PK 三线共点.

证. 法一: 设 MR 交 $\odot O$ 于 X_1 , QL 交 $\odot O$ 于 X_2 , PK 交 $\odot O$ 于 X_3 , 则

$$\frac{AX_1}{BX_1} = \frac{\sin \angle AMR}{\sin \angle BMR} = \frac{AR}{BR}, \quad \frac{AX_2}{BX_2} = \frac{\sin \angle ALX_2}{\sin \angle BLX_2} = \frac{\sin \angle ALQ}{\sin \angle I_B LQ} = \frac{AQ}{I_B Q} = \frac{AR}{BR},$$

其中 I_B 为 $\triangle ABC$ 中点 B 所对的旁心. 因为 $LA = LI = LI_B$, 所以 $\frac{\sin \angle ALQ}{\sin \angle I_B LQ} = \frac{AQ}{I_B Q}$. 同理, $\frac{AX_3}{BX_3} = \frac{AR}{BR}$. 又因为 $\angle AX_1 B = \angle AX_2 B = \angle AX_3 B$, 所以 $\triangle AX_1 B \cong \triangle AX_2 B \cong \triangle AX_3 B$. 于是 X_1, X_2, X_3 重合, MR, QL, PK 三线共点.

法二 (何高乐): 设 PK 交 $\odot O$ 于点 T , 因为 $PR \parallel AK$, 所以 $\angle TBR = \pi - \angle TKA = \angle TPR$, B, P, T, R 四点共圆. 于是 $\angle BTR = \dots = \angle BMC$, M, R, T 三点共线. 同理, Q, L, T 三点共线. 所以 MR, QL, PK 交于点 T . \square

例 6.3. 已知 $\triangle ABC$ 的内心为 I , AI, BI 分别交其外接圆 $\odot O$ 于点 K, L , R 在 AB 上, 满足 $RP \parallel AK$, $RQ \parallel BL$, PB 交 QA 于 Z , 且 I, A, Z, B 四点共圆. 求证: QL, PK 的交点在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

证. 法一: 设 QL 交 $\odot O$ 于 T_1 , PK 交 $\odot O$ 于 T_2 , ZA 交 BI 于 X , ZB 交 AI 于 Y , 则

$$\frac{AT_1}{BT_1} = \frac{\sin \angle ALT_1}{\sin \angle BLT_1} = \frac{\sin \angle ALQ}{\sin \angle BLQ} = \frac{AQ}{XQ} \cdot \frac{XL}{AL} = \frac{XL}{AL} \cdot \frac{AR}{BR}, \quad ①$$

$$\frac{AT_2}{BT_2} = \frac{\sin \angle YKP}{\sin \angle BKP} = \frac{YP}{BP} \cdot \frac{BK}{YK} = \frac{BK}{YK} \cdot \frac{AR}{BR}, \quad ②$$

因为 $\angle LXA = \angle BAZ - \frac{B}{2}$, $\angle KBY = \angle ABY - \angle ABK = \angle BAZ + \angle AZB - \angle ABK = \angle BAZ + \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} - (B + \frac{A}{2}) = \angle BAZ - \frac{B}{2} = \angle LXA$, $\angle XLA = \pi - \angle ALB = \pi - \angle AKB = \angle BKY$, 所以 $\triangle XLA \sim \triangle BKY$, $\frac{XL}{AL} = \frac{BK}{YK}$. 由①, ②式, $\frac{AT_1}{BT_1} = \frac{AT_2}{BT_2}$, 又因为 $\angle AT_1B = \angle AT_2B$, AB 为公共边, 所以 $\triangle AT_1B \cong \triangle AT_2B$. 于是 T_1, T_2 重合, QL, PK 的交点在 $\odot O$ 上.

法二 (何高乐): 设 QL 交 $\odot O$ 于点 T , 则 A, R, T, Q 四点共圆. 因为 $\angle PBR = \pi - \angle ZBA = \pi - \angle ZIA = \angle ZIB + \angle AIL = \angle LTK + \angle RTL = \angle RTP$. \square

例 6.4. O, H 分别是 $\triangle ABC$ 的外心、垂心, D, F 分别是 BC, AB 的中点, P, Q 分别在 BA, BC 上, 且满足 $DP \perp DH, FQ \perp FH$. 求证: $PQ \perp OH$.

证. 法一: 设 J 为 A 到 BC 的投影, $\alpha = \angle BDP = \angle DHJ$, 则

$$DJ \cot \alpha = c \cos B \cot C = 2R \cos B \cos C, \quad DJ = \frac{a}{2} - c \cos B = R \sin(B - C),$$

$$\cot \alpha = \frac{2 \cos B \cos C}{\sin(B - C)}, \quad BP = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(B - \alpha)} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\sin B \cot \alpha - \cos B}, \quad ①$$

$$\begin{aligned} & \text{因为 } \sin B \cdot 2 \cos B \cos C - \cos B \sin(B - C) = \sin B \cdot (\cos(B - C) - \cos A) - \cos B \sin(B - C) \\ & = \sin(B - (B - C)) - \sin B \cos A = \sin C - \sin B \cos A = \sin A \cos B, \quad \text{所以①式右边} \\ & = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin(B - C)}{\sin A \cos B} = \frac{R \sin(B - C)}{\cos B}, \quad \text{同理, } BQ = \frac{R \sin(B - A)}{\cos B}, \end{aligned}$$

要证 $PQ \perp OH \iff 0 = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OH} = (\overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{BP}) \cdot (\overrightarrow{BH} - \overrightarrow{BO})$, 即

$$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BH} - \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{BH} - \overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{BO} \quad ②, \quad \text{因为 } \angle HBP = A + \frac{\pi}{2}, \quad \angle OBP = \frac{\pi}{2} + C,$$

$$\begin{aligned} & \text{所以②式左边} = 2R^2 \sin(B - C) \cdot (A + \frac{\pi}{2}) - R^2 \cdot \frac{\sin(B - C)}{\cos B} \cdot \cos(\frac{\pi}{2} + C) \\ & = R^2 \cdot \frac{\sin(B - C)}{\cos B} (-2 \sin A \cos B + \sin C) = R^2 \cdot \frac{\sin(B - C) \sin(B - A)}{\cos B}, \end{aligned}$$

法二 (何高乐): 设 OD, HC 交于点 E , OF, HA 交于点 G . 因为 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心, 所以 $\angle GAF = \angle ECD$, $\triangle AFG \sim \triangle CDE$, \square

例 6.5 (2020, 东南数学奥林匹克). 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = \angle ADC < \frac{\pi}{2}$, 以 AC 为直径的圆与边 BC, CD 的另一个交点分别为 E, F . 设 M 为 BD 的中点, 作 $AN \perp BD$ 于点 N . 求证: M, N, E, F 四点共圆.

证. 设 B' 为 B 关于 E 的对称点, 则 B, B' 关于 AE 对称, $\angle AB'C = \angle ABC = \angle ADC$, A, D, B', C 四点共圆. 由正弦定理, $B'D = AC \cdot \frac{\sin \angle BCD}{\sin \angle ADC}$. 同理, 设 D' 为 D 关于 F 的对称点, 则 $D'B = AC \cdot \frac{\sin \angle BCD}{\sin \angle ABC} = B'D$. 于是 $ME = \frac{1}{2} B'D = \frac{1}{2} D'B = MF$. 因为 $\angle ANB = \angle AEB = \angle AFD = \frac{\pi}{2}$, 所以 A, N, E, B 四点共圆, A, N, F, D 四点共圆, $\angle MNE = \angle BAE = \frac{\pi}{2} - \angle ABC = \frac{\pi}{2} - \angle ADC = \angle DAF = \angle DNF =$

$\pi - \angle MNF$ 。设 E' 为 E 关于 MN 的对称点, 则 $\angle MNE' = \angle MNE = \pi - \angle MNF$, E', N, F 三点共线, 又因为 $ME' = ME = MF$, 所以 $\angle MFN = \angle ME'N = \angle MEN$, M, N, E, F 四点共圆。□

7 调和点列与完全四边形

性质 7.1. 线束的交比与所截直线无关。

证. 设过 O 的四条直线被直线 l 分别截于点 A, C, B, D , 被直线 l_1 分别截于点 A_1, C_1, B_1, D_1 , 则

$$\frac{AC}{BC} = \frac{OA \sin \angle AOC}{OB \sin \angle BOC}, \quad \frac{AD}{BD} = \frac{OA \sin \angle AOD}{OB \sin \angle BOD}, \quad (A, B; C, D) = \frac{\sin \angle AOC}{\sin \angle BOC} \cdot \frac{\sin \angle AOD}{\sin \angle BOD},$$

同理, $(A_1, B_1; C_1, D_1) =$ 上式右边 $= (A, B; C, D)$ 。上述角度均为有向角。□

性质 7.2. 若 $A, B; C, D$ 成调和点列, O 是 CD 中点, 则 O 在 A, B 同侧, 且有: (1) $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{AC}$,
(2) $OC^2 = OD^2 = OA \cdot OB$, (3) $AC \cdot AD = AB \cdot AO$, (4) $AB \cdot OD = AC \cdot BD$ 。

分析: 题目中在一条直线上有五个点, 两两之间的线段有10条, 运算时太不方便了。为了简化计算, 应将 $A, B; C, D$ 四个点与数轴上的数做对应, 以此表示各线段长度。

证. 设 $AB = b, AC = c, AD = d$, (1) 则 $\frac{AB}{AD} + \frac{AB}{AC} = 1 - \frac{BD}{AD} + 1 + \frac{BC}{AC} = 2$, 所以 $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$;
(2) 则 $OA = \frac{c+d}{2}, OB = OA - AB = \frac{c+d}{2} - b$ ①。由(1)问, $\frac{2}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}, b = \frac{2cd}{c+d}$, ①式右边 = $\frac{(c-d)^2}{2(c+d)}$, 所以 $OA \cdot OB = \frac{(d-c)^2}{4} = OC^2 = OD^2$ 。(3) 由(2)问, $OC^2 = OA \cdot OB = AO^2 - AB \cdot AO$, 所以 $AC \cdot AD = AO^2 - OC^2 = AB \cdot AO$ 。(4) □

性质 7.3. 一直线被调和线束中的三条平分当且仅当它与第四条平行。

证. 充分性: 设直线 l 与 OB, OD, OA 分别交于 P, Q, R , 若 $l \parallel OC$, 则过 D 作 $l' \parallel l$ 分别交 OB, OA 于 P', R' 。我们有 $\frac{P'D}{OC} = \frac{BD}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{R'D}{OC}$, 所以 $P'D = R'D, \frac{PQ}{QR} = \frac{P'D}{R'D} = 1, PQ = QR$ 。必要性: □

性质 7.4. 设完全四边形 $ABCDEF$ 中, AB 交 CD 于 E, AD 交 BC 于 F , 对角线 AC 与另外两条对角线 BD, EF 的交点为 P, Q , 则 A, P, C, Q 为调和点列。同理, 设 BD 与 EF 交于点 R , 则 B, P, D, R 为调和点列, E, Q, F, R 为调和点列。

证. 由塞瓦定理和梅涅劳斯定理, 考察: (1) 交于点 C 的三条直线 AQ, ED, FB , 和 $\triangle AEF$ 的截线 BDR ; (2) 交于点 C 的三条直线 AP, BF, DE , 和 $\triangle ABD$ 的截线 EFR ; (3) 交于点 D 的三条直线 AF, BP, CE , 和 $\triangle ABC$ 的截线 EFR , 我们有:

$$\frac{EQ}{QF} = \frac{EB}{BA} \cdot \frac{AD}{DF} = \frac{ER}{RF}, \quad \frac{BP}{PD} = \frac{BE}{EA} \cdot \frac{AF}{FD} = \frac{BR}{RD}, \quad \frac{AP}{PC} = \frac{AE}{EB} \cdot \frac{BF}{FC} = \frac{AQ}{QC},$$

所以 E, Q, F, R 为调和点列, B, P, D, R 为调和点列, A, P, C, Q 为调和点列。□

例 7.1. 在完全四边形 $ABCDEF$ 中, AB 交 CD 于 E, AD 交 BC 于 F , 设 AC 交 BD 于 $G, GJ \perp EF$ 于点 J , 求证: $\angle BJA = \angle DJC$ 。

证. 延长 AC 交 EF 于 K , 由性质4知 A, G, C, K 成调和点列。因为 $GJ \perp KJ$, 由性质5知 GJ 平分 $\angle CJA$ 。同理, 延长 BD 交 EF 于 L , 则 B, G, D, L 成调和点列。因为 $GJ \perp LJ$, 所以 GJ 平分 $\angle BJD$, $\angle BJA = \angle BJG + \angle GJA = \angle DJG + \angle GJC = \angle DJC$ 。□

例 7.2. P 为 $\odot O$ 外一点, PA, PB 为 $\odot O$ 的两条切线, PCD 为任意一条割线, CF 平行于 PA 且与 AB 交于点 E , 与 AD 交于点 F , 求证: $CE = EF$ 。

证. 法一: 设 AB 交 CD 于 G , 则因为 $\triangle PCA \sim \triangle PAD$, $\triangle PCB \sim \triangle PBD$, $\triangle ACG \sim \triangle DBG$, $\triangle CBG \sim \triangle ADG$, 所以

$$\frac{PC}{PD} = \frac{PC}{PA} \cdot \frac{PB}{PD} = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{BD} \cdot \frac{BC}{AD} = \frac{CG}{BG} \cdot \frac{BG}{DG} = \frac{CG}{DG},$$

所以 D, G, C, P 成调和点列, AD, AG, AC, AP 为调和线束。因为 $CF \parallel AP$, 由性质3知 $CE = EF$ 。

法二: 由法一知 D, G, C, P 成调和点列。由梅涅劳斯定理, $\frac{CE}{EF} = \frac{CG}{GD} \cdot \frac{DA}{AF} = \frac{CP}{PD} \cdot \frac{DP}{PC} = 1$, 所以 $CE = EF$ 。□

例 7.3. 点 D, E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 BC, AB 上, AD, CE 相交于 F , BF, DE 相交于 G , 过 G 作 BC 的平行线, 分别与直线 CE, AC 相交于 M, N 。求证: $GM = MN$ 。

证. 设 BF 交 AC 于 K , 由梅涅劳斯定理和塞瓦定理, 有 $\frac{BG}{GF} = \frac{BC}{CD} \cdot \frac{DA}{AF} = \frac{BK}{KF}$, 所以 B, G, F, K 为调和点列, CB, CG, CF, CK 为调和线束。又因为 $GM \parallel BC$, G, M, N 是直线 GM 截 CG, CF, CK 的交点, 由性质3知 $GM = MN$ 。□

例 7.4 (Brocard定理). 在圆内接四边形 $ABCD$ 中, AB 交 CD 于 P , AD 交 BC 于 Q , AC 交 BD 于点 R , 则 P, Q, R, O 构成垂心四点组 (即任意一点是其余三点的垂心)。

证. □

例 7.5.

证. □

例 7.6. 在四边形 $ABCD$ 中, AB 交 CD 于 E , AD 交 BC 于 F , 设 AC 交 BD 于 J , $JM \perp EF$ 于点 M , M 关于 AB, CD 的对称点分别为 S, T 。求证: S, T, J 三点共线。

证. 法一: 由张角定理, 只需证明 $\frac{\sin \angle SEJ}{EM} = \frac{\sin \angle TEJ}{EM} + \frac{\sin \angle TES}{EJ}$ 。

法二: 由张角定理, 只需证明 $\frac{\sin \angle SMJ}{MT} = \frac{\sin \angle SMT}{MJ} + \frac{\sin \angle JET}{MS}$ 。

法三: 设 M 关于 EJ 的对称点为 N 点, 则 $EM = EN = ES = ET$, M, N, S, T 四点共圆, 圆心为 E 。因为 $\angle JNE = \angle JME = \frac{\pi}{2}$, 所以 JM, JN 均与 $\odot E$ 相切。因为 MT, MS, NT, NS 在 $\odot E$ 中所对的圆周角分别为 $\angle MEC, \angle MEB, \angle JEC, \angle JEB$, 所以由正弦定理, $\frac{MT}{MS} = \frac{\sin \angle MEC}{\sin \angle MEB}$, $\frac{NT}{NS} = \frac{\sin \angle JEC}{\sin \angle JEB}$ 。因为 $EB, EC; EJ, EM$ 是调和线束, 所以 $\frac{\sin \angle MEC}{\sin \angle MEB} = \frac{\sin \angle JEC}{\sin \angle JEB}$, $\frac{MT}{MS} = \frac{NT}{NS}$, 四边形 $MTNS$ 是调和四边形。因为 J 是 $\odot O$ 过 M, N 的两条切线的交点, 所以 S, T, J 三点共线。□

例 7.7.

证. □

例 7.8.

证. □

8 递推数列-1

例 8.1. 设 $\{F_n\}_{n \geq 1}$ 为斐波那契数列, $F_1 = F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \geq 1$. (1) 求证: $F_n \equiv n \cdot 3^{n-1} \pmod{5}$; (2) 求 F_{2020} 的末位数; (3) 求证: $n \geq 1$ 时, $F_{n+60} \equiv F_n \pmod{10}$.

证. □

例 8.2 (1994, 高联). 将与 105 互素的所有正整数从小到大排成数列, 求该数列的第 1000 项.

证. □

例 8.3 (斐波那契数列的性质). 设 $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, 求证: (1) $n \geq 1$ 时, $\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$;

(2) $n \geq 2$ 时, $F_{n-1} F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$, 于是 $\prod_{i=2}^{\infty} (1 + \frac{(-1)^i}{F_i^2}) = \alpha$;

(3) $n \geq 1$ 时, $F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \dots = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-k}{k}$;

(4) $n \geq 1$ 时, $\sum_{i=0}^n \frac{1}{F_{2^i}} = 3 - \frac{F_{2^{n-1}}}{F_{2^n}}$, 于是 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^i}} = 4 - \alpha$;

(5) $n \geq 1$ 时, $\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{F_i F_{i+1}} = \frac{F_n}{F_{n+1}}$, 于是 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{F_i F_{i+1}} = \alpha - 1$.

证. (1) $n = 1$ 时命题成立, 假设命题对 $n - 1$ 成立, 则 $\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_{n-1} F_n + F_n^2 = F_n F_{n+1}$, 命题对 n 成立.

(2) $F_{n-1} F_{n+1} - F_n^2 = F_{n-1} (F_n + F_{n-1}) - F_n^2 = F_{n-1}^2 - F_n (F_n - F_{n-1}) = F_{n-1}^2 - F_n F_{n-2}$.

(3)

(4) 只需证明 $n \geq 1$ 时, $\frac{F_{2^{n-1}}}{F_{2^n}} \cdot F_{2^{n+1}} - 1 = F_{2^{n+1}-1}$ ②. 设 $k = 2^n$, 则 $\frac{F_{2k}}{F_k} = \frac{\alpha^{2k} - \bar{\alpha}^{2k}}{\alpha^k - \bar{\alpha}^k} = \alpha^k + \bar{\alpha}^k$, ②式左边 = $F_{k-1}(\alpha^k + \bar{\alpha}^k) - 1 = \frac{1}{\sqrt{5}}[\alpha^{2k-1} - \bar{\alpha}^{2k-1} - \alpha(-1)^{k-1} + \bar{\alpha}^{k-1}] - 1 = F_{2k-1} + (-1)^k - 1 =$ ②式右边.

(5) □

例 8.4. 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 5$, 且 $n \geq 2$ 时, $a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1}}{\sqrt{a_n^2 + a_{n-1}^2} + 1}$, 求数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 的通项公式.

解. $n \geq 2$ 时, 我们有 $\frac{1}{a_{n+1}^2} = \frac{a_n^2 + a_{n-1}^2 + 1}{a_n^2 a_{n-1}^2}, 1 + \frac{1}{a_{n+1}^2} = (1 + \frac{1}{a_n^2})(1 + \frac{1}{a_{n-1}^2})$. $n \geq 1$ 时, 设 $b_n = \log(1 + \frac{1}{a_n^2})$,

则 $b_1 = \log 2, b_2 = \log \frac{26}{25}$. $n \geq 2$ 时, $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$. 设 $\{F_n\}_{n \geq 1}$ 为斐波那契数列, $F_1 = F_2 = 1, n \geq 2$ 时, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ ①. 补充定义 $F_0 = 0, F_{-1} = 1$, 则 $n \geq 0$ 时①式成立. 我们证明对任意正整数 n , 都有 $b_n = F_{n-1} b_2 + F_{n-2} b_1$ ②. $n = 1, 2$ 时②式成立, $n \geq 3$ 时假设②式对 $1, 2, \dots, n - 1$ 成立,

则 $b_n = b_{n-1} + b_{n-2} = (F_{n-2} + F_{n-3})b_2 + (F_{n-3} + F_{n-4})b_1 = F_{n-1} b_2 + F_{n-2} b_1$, 由归纳法知②式对任意正整数 n 成立. 所以 $1 + \frac{1}{a_n^2} = (\frac{26}{25})^{F_{n-1}} 2^{F_{n-2}}, a_n = [(\frac{26}{25})^{F_{n-1}} 2^{F_{n-2}} - 1]^{-\frac{1}{2}}$, 其中由 Binet 公式, $F_n =$

$\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1 + \sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1 - \sqrt{5}}{2})^n]$. □

例 8.5 (2024, 高联预赛吉林). 已知数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 2$, 且 $n \geq 2$ 时 $a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + a_{n-1}$. 求

证: $\sum_{k=1}^{2024} \frac{1}{a_k} > 88$ ①。

证. $a_{n+1}a_n = 1 + a_n a_{n-1} = \dots = n - 1 + a_2 a_1 = n + 1, a_{2024} a_{2025} = 2025$. 另一边, $n \geq 2$ 时, $\frac{1}{a_n} =$

$a_{n+1} - a_{n-1}, \sum_{k=1}^{2024} \frac{1}{a_k} = 1 + \sum_{k=2}^{2024} (a_{k+1} - a_{k-1}) = 1 + (a_{2025} + a_{2024} - a_2 - a_1) \geq 2\sqrt{a_{2024} a_{2025}} - 2 = 88$ ②。下面

证明 $n \geq 1$ 时, $a_{2n} > a_{2n+1}$ ③。我们归纳地证明加强的结论: $n \geq 1$ 时, $a_{2n} > \sqrt{2n+1}, a_{2n-1} \leq \sqrt{2n-1}$

④。 $n = 1$ 时命题成立。 $n \geq 2$ 时, 假设命题对 $n-1$ 成立, 则 $a_{2n-1} = \frac{2n-1}{a_{2n-2}} < \frac{2n-1}{\sqrt{2n-1}} = \sqrt{2n-1}, a_{2n} =$

$\frac{2n}{a_{2n-1}} > \frac{2n}{\sqrt{2n-1}} > \sqrt{2n+1}$, 命题对 n 成立。由数学归纳法, 命题④成立, 所以 $a_{2n} > \sqrt{2n+1} \geq a_{2n+1}$,

命题③成立。于是 $a_{2024} > a_{2025}$, ②式中等号不成立, ①式成立。注: 事实上, $a_n = \frac{n!!}{(n-1)!!}$ 。 \square

例 8.6 (2024, 高联预赛内蒙古). 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 中, $a_1 = \frac{1}{10}$, 且对任意正整数 n , 有 $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$,

求 $\sum_{k=1}^{2024} \frac{1}{a_k + 1}$ 的整数部分。

证. 因为 $a_{n+1} - a_n = a_n^2 > 0$, 所以 $\{a_n\}$ 单调增, $a_{2025} = a_1 + \sum_{k=1}^{2024} a_k^2 > \frac{1}{10} + 2024 \cdot \frac{1}{100} > 1$. 又因

为 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_n + 1}$, 所以 $\sum_{k=1}^{2024} \frac{1}{a_k + 1} = \sum_{k=1}^{2024} (\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}) = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{2025}} > 10 - 1 = 9$. \square

例 8.7 (2024, 高联预赛上海). 设数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 满足: $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, (n \geq 1)$, M 是大于 1 的正整数。求证: 在数列 a_3, a_4, a_5, \dots 中存在相邻的两项, 它们除以 M 的余数相等。

证. 考察序列 $\{(a_n, a_{n+1}) \pmod{M}\}_{n \geq 1}$, 其中每项的两个分量都只有 M 种取法。由抽屉原理, 存在 $1 \leq i < j \leq M^2 + 1$, 使得 $a_i \equiv a_j \pmod{M}, a_{i+1} \equiv a_{j+1} \pmod{M}$ 。设 $T = j - i \in \mathbb{Z}_+$, 我们证明对任意 $1 \leq n \leq i + 1, a_n \equiv a_{n+T} \pmod{M}$ 。 $n = i, i + 1$ 时命题成立。 $1 \leq n < i$ 时, 假设已经证明 $a_{n+1} \equiv a_{n+1+T} \pmod{M}, a_{n+2} \equiv a_{n+2+T} \pmod{M}$, 则 $a_n = a_{n+2} - a_{n+1} \equiv a_{n+2+T} - a_{n+1+T} = a_{n+T} \pmod{M}$, 命题对 n 成立。由归纳法知命题对任意 $1 \leq n \leq i + 1$ 成立。因为 $M \geq 2$, 所以 $a_3 = 2 \not\equiv 1 = a_2 \pmod{M}, T \geq 2$, 所以 a_{T+1}, a_{T+2} 是数列 a_3, a_4, a_5, \dots 中相邻的两项, 且满足 $a_{T+1} \equiv a_1 = 1 = a_2 \equiv a_{T+2} \pmod{M}$ 。 \square

例 8.8 (2023, 高联预赛甘肃). 已知数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 中, $a_1 = 2$, 且 $n \geq 1$ 时 $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n + 2}$ 。求证: (1) $a_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}$; (2) $\frac{2a_1}{a_1 + 2} + \frac{4a_2}{a_2 + 2} + \dots + \frac{2na_n}{a_n + 2} < 4$ 。

证. (2) 因为 $\frac{2a_n}{a_n + 2} = a_n - \frac{a_n^2}{a_n + 2} = a_n - a_{n+1}$, 所以原式左边 = $\sum_{i=1}^n i(a_i - a_{i+1}) = a_1 + a_2 + \dots + a_n - na_{n+1} <$

$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{i-2}} = 4$ 。 \square

9 代数选讲-1

例 9.1 (2008, 高联). 解不等式 $\log_2(x^{12} + 3x^{10} + 5x^8 + 3x^6 + 1) < 1 + \log_2(x^4 + 1)$ 。

证. 设 $y = x^2$, 则 $y^6 + 3y^5 + 5y^4 + 3y^3 - 2y^2 - 1 = (y^2 + y - 1)(y^4 + 2y^3 + 4y^2 + y + 1) < 0$, 解得 $0 \leq y < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $x \in (-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}})$. \square

例 9.2. 已知正实数 a, b, c 满足 $\sqrt{a^2 + b^2} + c = 1$, 求 $ab + 2ac$ 的最大值。

证. 拉格朗日乘法: 设 $F = \sqrt{a^2 + b^2} + c = 1$, $G = a(b + 2c)$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, 则在 G 的极值点处, $\nabla F = (\frac{a}{r}, \frac{b}{r}, 1)$, $\nabla G = (b + 2c, a, 2a)$, $\nabla F // \nabla G$. 所以 $b = \frac{r}{2}$, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}r$, $b + 2c = \sqrt{3}a$, $2c = \sqrt{3}a - b = r$, $c = \frac{r}{2}$, 于是 $r = \frac{2}{3}$, $c = b = \frac{1}{3}$, $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 我们可以由上述过程猜出最大值点. 证明如下:

由均值不等式和柯西不等式, $G = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}a(b + 2c) \leq \frac{1}{4\sqrt{3}}(\sqrt{3}a + b + 2c)^2 \leq \frac{1}{4\sqrt{3}}(2\sqrt{a^2 + b^2} + 2c)^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $b = c = \frac{1}{3}$ 时, G 取最大值 $\frac{1}{\sqrt{3}}$. \square

例 9.3. 非负实数 x, y, z 满足 $x + y + z = 2$, 求 $F = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz$ 的最大值。

证. 法一: 设 $t = yz$, 则 $F = x^2(y^2 + z^2) + (yz)^2 + x(yz) = x^2((2-x)^2 - 2t) + t^2 + xt$. 对固定的 x , 它是关于 t 的二次函数, 开口向上, 最大值只在 t 取值区间的端点处取到. 因为 $0 \leq t \leq \frac{(2-x)^2}{4}$, 所以只需考虑 $t = 0$ 或 $\frac{(2-x)^2}{4}$ 的情形, 即 $yz = 0$ 或 $y = z$ 时. (1) $yz = 0$, 不妨设 $y = 0$, 此时 $F = (xz)^2 \leq [\frac{(x+z)^2}{4}]^2 = 1$. (2) $y = z$, 此时 $x = 2 - 2y$,

$$F(y) = 2y^2(2 - 2y)^2 + y^4 + y^2(2 - 2y) = 9y^4 - 18y^3 + 10y^2,$$

$$F'(y) = 36y^3 - 54y^2 + 20y = 2y(3y - 2)(6y - 5),$$

$y \in (0, \frac{2}{3}) \cup (\frac{5}{6}, 1)$ 时, $F'(y) > 0$, $F(y)$ 单调增. $y \in (\frac{2}{3}, \frac{5}{6})$ 时, $F'(y) < 0$, $F(y)$ 单调减. 所以 $F(y) \leq \max\{F(\frac{2}{3}), F(\frac{5}{6})\} = \max\{\frac{8}{9}, 1\} = 1$, $x = 0, y = z = 1$ 时等号成立, 所以 F 最大值为 1.

法二: 由均值不等式, $2F = 2 \sum x^2y^2 + xyz \sum x \leq \sum (x^3y + xy^3) + xyz \sum x = (\sum x^2)(\sum xy) = \frac{1}{2}(\sum x^2)(2 \sum xy) \leq \frac{1}{2}(\frac{\sum x^2 + 2 \sum xy}{2})^2 = \frac{1}{8}(\sum x)^4 = 2$, 所以 $F \leq 1$. \square

例 9.4. 实数 x, y, z 满足 $x + y + z = xy + yz + zx$, 求 $\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2}$ 的最小值。

证. \square

例 9.5. 设 m 为正整数, 实数 x_1, x_2, \dots, x_m 满足 $\sum_{i=1}^m x_i = m$, $\sum_{i=1}^m x_i^2 = 11m$, $\sum_{i=1}^m x_i^3 = m$, $\sum_{i=1}^m x_i^4 = 131m$. 求证: $7 \mid m$.

证. 设 $a, b \in \mathbb{R}$ 为待定常数, 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都有

$$(x^2 - ax + b)^2 = x^4 - 2ax^3 + (a^2 + 2b)x^2 - 2abx + b^2 \geq 0, \quad (1)$$

分别将 $x = x_1, x_2, \dots, x_m$ 代入①式并求和, 有

$$\sum_{i=1}^m (x_i^2 - ax_i + b)^2 = 131m - 2am + 11m(a^2 + 2b) - 2abm + b^2m \geq 0,$$

$$0 \leq b^2 - 2ab + 11(a^2 + 2b) - 2a + 131 = (b - a + 11)^2 + 10(a + 1)^2 \quad (2)$$

对任意 $a, b \in \mathbb{R}$ 成立。特别地，令 $a = -1, b = -12$ ，此时②式等号成立，所以 $x_i^2 + x_i - 12 = 0$ 对所有 $1 \leq i \leq m$ 成立。 \square

例 9.6. 设正整数 $n \geq m \geq 1$ ，求证：
$$\sum_{k=m}^n \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} \right) \geq m \left(\sum_{k=m}^n \frac{1}{k^2} \right)^2 \quad \text{①}。$$

证. 法一：由柯西不等式，原式左边 $\cdot \frac{1}{m} > \left(\sum_{k=m}^n \frac{k+1}{k^3} \right) \left(\sum_{k=m}^n \frac{1}{k(k+1)} \right) \geq m \left(\sum_{k=m}^n \frac{1}{k^2} \right)^2$ ，所以原式成立。

法二：①式 $\iff \frac{1}{m} \sum_{k=m}^n \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} \right) \geq \left(\sum_{k=m}^n \frac{1}{k^2} \right)^2$ ②。 $m = n$ 时， $\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right) > \left(\frac{1}{n^2} \right)^2$ ，②式成立。

对 m 向前归纳，每步只需证明 $\frac{1}{m} \sum_{k=m}^n \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} \right) - \frac{1}{m+1} \sum_{k=m+1}^n \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} \right) \geq \frac{1}{m^2} \left(\frac{1}{m^2} + 2 \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^2} \right)$ ③，

$$\iff \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} \right) + \frac{1}{m(m+1)} \sum_{k=m+1}^n \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} \right) \geq \frac{1}{m^2} \left(\frac{1}{m^2} + 2 \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^2} \right),$$

$$\iff \frac{1}{m} + \frac{m}{m+1} \sum_{k=m+1}^n \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} \right) \geq 2 \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^2},$$

$$\iff \frac{1}{m} + \frac{m}{m+1} \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^3} \geq \frac{m+2}{m+1} \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^2}, \quad \text{④}$$

$$\text{因为 } \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2 - k + \frac{1}{2}} - \frac{1}{k^2 + k + \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2k}{(k^2 - k + \frac{1}{2})(k^2 + k + \frac{1}{2})} = \frac{k}{k^4 + \frac{1}{4}} \leq \frac{1}{k^3},$$

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{k - \frac{1}{2}} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}}, \quad \text{所以 } \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^3} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m^2 + m + \frac{1}{2}} - \frac{1}{n^2 + n + \frac{1}{2}} \right),$$

$$\sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{m + \frac{1}{2}} - \frac{1}{n + \frac{1}{2}}, \quad \text{④式左边} \geq \frac{1}{m} + \frac{m}{m+1} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m^2 + m + \frac{1}{2}} - \frac{1}{n^2 + n + \frac{1}{2}} \right),$$

$$\text{④式右边} \leq \frac{m+2}{m+1} \left(\frac{1}{m + \frac{1}{2}} - \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \right), \quad \frac{1}{m} - \frac{m+2}{(m+1)(m + \frac{1}{2})} = \frac{1-m}{m(m+1)(2m+1)},$$

$$\frac{m}{2(n^2 + n + \frac{1}{2})} \leq \frac{m+2}{n + \frac{1}{2}}, \quad \frac{m}{2(m^2 + m + \frac{1}{2})} \geq \frac{m-1}{m(2m+1)},$$

$$\text{所以④式左边} - \text{右边} \geq \frac{1}{m} - \frac{m+2}{(m+1)(m + \frac{1}{2})} + \frac{1}{m+1} \left[\frac{m}{2(m^2 + m + \frac{1}{2})} + \left(\frac{m+2}{n + \frac{1}{2}} - \frac{m}{2(n^2 + n + \frac{1}{2})} \right) \right] \geq 0,$$

于是④，③，②，①式都成立。注：此方法的一个要点是对 m 从后向前归纳，这是因为不等式随着 n 变大会变紧，对 n 从前向后归纳行不通。 \square

例 9.7. 已知正实数 x, y 满足 $x + y^{2020} \geq 1$ 。求证：
$$x^{2020} + y \geq \frac{99}{100} \quad \text{①}。$$

证. (1) $y \geq \frac{99}{100}$ 时①式成立。(2) $y < \frac{99}{100}$ 时， $x \geq 1 - y^{2020}$ ， $y^{2020} < \left(\frac{99}{100} \right)^{100 \cdot 20} < \left(\frac{1}{e} \right)^{20} < \frac{1}{2020 \cdot 100}$ 。

由伯努利不等式，①式左边 $\geq (1 - y^{2020})^{2020} + y \geq 1 - 2020y^{2020} > 1 - \frac{99}{2020 \cdot 100} = \frac{99}{100}$ 。

注：本题中的常数2020非常松，最小能取多少？已经发现能取400。 \square

例 9.8. 正实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 4\sqrt[3]{abc}$ 。求证：
$$2(ab + bc + ca) + 4 \min\{a^2, b^2, c^2\} \geq a^2 + b^2 + c^2 \quad \text{①}。$$

证. 本题的条件和结论关于 a, b, c 都是齐次的，可以不妨设 $abc = 1$ ， $a \leq b \leq c$ ，则 $a + b + c = 4$ 。

$$\text{①式} \iff 2(ab + bc + ca) + 4a^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 \iff 4(ab + bc + ca) + 4a^2 \geq (a + b + c)^2 = 16,$$

$$\iff a(a+b+c) + bc \geq 4, \quad \text{由均值不等式, 上式左边} = 4a + \frac{1}{a} \geq 4,$$

所以①式成立。 □

例 9.9. 正实数 x, y, z 满足 $x + y + z = 1$ 。求证: $\frac{xy}{\sqrt{xy+yz}} + \frac{yz}{\sqrt{yz+zx}} + \frac{zx}{\sqrt{zx+xy}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ①。

证. 由柯西不等式,

$$\left(\sum \frac{xy}{\sqrt{xy+yz}}\right)^2 \leq \left(\sum xy\right)\left(\sum \frac{x}{x+z}\right) = \sum \frac{x[y(x+z) + xz]}{x+z} = \sum xy + \sum \frac{x^2z}{x+z}, \quad \text{②}$$

$$\text{因为 } \frac{xz}{x+z} \leq \frac{x+z}{4}, \quad \text{所以②式右边} \leq \sum xy + \sum x \cdot \frac{x+z}{4} \leq \frac{1}{2}\left(\sum x^2 + 2\sum xy\right) = \frac{1}{2},$$

所以①式左边 $\leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。 □

例 9.10. 设正实数 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2 \leq 4$ 。求证: $\frac{ab+1}{(a+b)^2} + \frac{bc+1}{(b+c)^2} + \frac{ca+1}{(c+a)^2} \geq 3$ ①。

证. 由题意知 $\sum a^2 + \sum ab \leq 2$ 。①式 $\iff \sum \frac{2ab + \sum a^2 + \sum ab}{(a+b)^2} \geq 6$ ②。因为 $\frac{2ab + \sum a^2 + \sum ab}{(a+b)^2} = 1 + \frac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}$, 所以由均值不等式, ②式左边 - 右边 = $\sum \frac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2} - 3 \geq 0$, ②, ①式成立。 □

10 递推数列-2

例 10.1. 已知卢卡斯数列 $\{L_n\}_{n \geq 0}$ 的通项公式为 $L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ 。求证: 对任意素数 p , 都有 $p|L_p - 1$ 。

证. □

例 10.2. 设 α, β 是整系数首一多项式 $x^2 + ax + b = 0$ 的两根。求证: (1) 对任意非负整数 n , $\alpha^n + \beta^n$ 都是整数; (2) 对任意素数 p , 都有 $p|\alpha^p + \beta^p - \alpha - \beta$ 。这是费马小定理的一个推广, $\alpha \in \mathbb{Z}, \beta = 0$ 时即为费马小定理。

证. □

例 10.3. 已知数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{1}{\sqrt{-7}} \left[\left(\frac{-1+\sqrt{-7}}{2}\right)^n - \left(\frac{-1-\sqrt{-7}}{2}\right)^n \right]$ 。求证: $\{a_n\}$ 中包含无穷多个正项和无穷多个负项。

证. □

例 10.4. (1) 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 满足 $a_1 = 2, n \geq 1$ 时 $a_{n+1} = \frac{3a_n + 1}{a_n + 3}$, 求 $\{a_n\}$ 的通项。(2) 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 满足 $a_1 = 7, n \geq 1$ 时 $a_{n+1} = \frac{a_n - 2}{2a_n + 5}$, 求 $\{a_n\}$ 的通项。

证. □

以下很多题的关键是巧妙地对递推式作恒等变形。

例 10.5. 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 满足 $a_1 = 2, n \geq 1$ 时 $a_{n+1} = \frac{2(n+1)a_n}{a_n + n}$, 求 $\{a_n\}$ 的通项。

证. $\frac{2(n+1)}{a_{n+1}} = \frac{a_n + n}{a_n} = 1 + \frac{n}{a_n}$, $\frac{2^{n+1}(n+1)}{a_{n+1}} = 2^n + \frac{2^n \cdot n}{a_n} = \dots = 2^n + 2^{n-1} + \dots + 2 + \frac{2 \cdot 1}{a_1} = 2^{n+1} - 1$, $\frac{2^n \cdot n}{a_n} = 2^n - 1$, $a_n = \frac{2^n \cdot n}{2^n - 1}$. \square

例 10.6. 数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 中, 已知 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $n \geq 1$ 时 $x_{n+2} = \frac{2x_n x_{n+1}}{x_n + x_{n+1}}$, 求 $\{x_n\}$ 的通项.

证. \square

例 10.7. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 且对任意正整数 n , 都有 $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2} + 2$. 问: 是否存在常数 λ , 使得 $a_n + a_{n+2} = \lambda a_{n+1}$ 对任意正整数 n 都成立?

证. \square

例 10.8. 对任意实数 x , 函数 f 满足函数方程 $f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{2}f(x)$. 求证: f 是一个周期函数.

证. \square

例 10.9 (2011, 高联A卷). 已知数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 满足: $a_1 = 2t - 3$, $t \in \mathbb{R}$ 且 $t \neq \pm 1$. $n \geq 1$ 时, $a_{n+1} = \frac{(2t^{n+1} - 3)a_n + 2(t-1)t^n - 1}{a_n + 2t^n - 1}$. (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项. (2) 若 $t > 0$, 试比较 a_{n+1} 与 a_n 的大小.

证. (1) $a_{n+1} = \frac{(2t^{n+1} - 2)a_n + 2t^{n+1} - 2}{a_n + 2t^n - 1} - 1$, $a_{n+1} + 1 = 2(t^{n+1} - 1) \frac{a_n + 1}{a_n + 2t^n - 1}$,

$$\frac{2(t^{n+1} - 1)}{a_{n+1} + 1} = 1 + \frac{2(t^n - 1)}{a_n + 1} = \dots = n + \frac{2(t-1)}{a_1 + 1} = n + 1,$$

$$a_n + 1 = \frac{2(t^n - 1)}{n}, \quad a_n = \frac{2(t^n - 1)}{n} - 1,$$

(2) $a_{n+1} - a_n = \frac{2(t^{n+1} - 1)}{n+1} - \frac{2(t^n - 1)}{n} = 2(t-1) \left[\frac{1}{n+1}(t^n + t^{n-1} + \dots + t + 1) - \frac{1}{n}(t^{n-1} + \dots + t + 1) \right]$, \square

例 10.10 (2006, 高联). 已知数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ 满足 $a_0 = x$, $a_1 = y$, $n \geq 1$ 时, $a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1} + 1}{a_n + a_{n-1}}$. (1) 对于怎样的实数 x, y , 总存在正整数 n_0 , 使得 $n \geq n_0$ 时 a_n 恒为常数? (2) 求 $\{a_n\}$ 的通项.

证. 若 $\{a_n\}$ 是常数列, 各项均为 x , 则 $x = \frac{x^2 + 1}{2x}$, $x = \pm 1$. 这提示我们详细观察 $a_n \pm 1$.

$$a_{n+1} + 1 = \frac{(a_n + 1)(a_{n-1} + 1)}{a_n + a_{n-1}}, \quad a_{n+1} - 1 = \frac{(a_n - 1)(a_{n-1} - 1)}{a_n + a_{n-1}},$$

$$\frac{a_{n+1} - 1}{a_{n+1} + 1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 1} \cdot \frac{a_{n-1} - 1}{a_{n-1} + 1}, \quad \text{设 } b_n = \log\left(\frac{a_n - 1}{a_n + 1}\right),$$

\square

例 10.11. (1991, 高联) 设 n 为正整数, a_n 为下述自然数 N 的个数: N 的十进制表示中各位数字之和为 n , 且每位数字只能取 1, 3 或 4. 求证: a_{2n} 是完全平方数.

证. 法一: 数列 $\{a_n\}$ 的特征方程为 $x^4 - x^3 - x - 1 = (x^2 - x - 1)(x^2 + 1) = 0$, 它的四个特征根为 $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $\bar{\alpha} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, $\pm i$. 于是存在常数 A, B, C, D , 使得 $a_n = A\alpha^n + B\bar{\alpha}^n + Ci^n + Di^n$. 数列 $\{a_n\}$ 的初值为 $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 4$, 于是 A, B, C, D 满足下列四元一次方程:

$$A + B + C + D = 1, \quad A\alpha + B\bar{\alpha} + i(C - D) = 1,$$

$$A\alpha^2 + B\bar{\alpha}^2 - (C + D) = 1, \quad A\alpha^3 + B\bar{\alpha}^3 - i(C - D) = 2,$$

$$\text{解得 } A = \frac{3 + \sqrt{5}}{10} = \frac{\alpha^2}{5}, \quad B = \frac{3 - \sqrt{5}}{10} = \frac{\bar{\alpha}^2}{5}, \quad C = \frac{1}{5} - \frac{i}{10}, \quad D = \frac{1}{5} + \frac{i}{10},$$

又因为 $\alpha\bar{\alpha} = -1$, 所以 $a_{2n} = \frac{\alpha^{2n+2} + \bar{\alpha}^{2n+2}}{5} + (-1)^n \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{\alpha^{n+1} - \bar{\alpha}^{n+1}}{\sqrt{5}}\right)^2 = F_{n+1}^2$, 这里 F_{n+1} 是斐波那契数列的第 $n+1$ 项。于是 a_{2n} 是完全平方数。

法二: 因为 $a_{2n} = a_{2n-1} + a_{2n-3} + a_{2n-4}$, $a_{2n-1} = a_{2n-2} + a_{2n-4} + a_{2n-5}$, $a_{2n-3} + a_{2n-5} = a_{2n-2} - a_{2n-6}$, 所以 $a_{2n} = 2a_{2n-2} + 2a_{2n-4} - a_{2n-6}$ 。于是数列 $\{a_{2n}\}$ 的特征方程为 $x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = (x+1)(x^2 - 3x + 1) = 0$, 它的三个特征根为 $\alpha^2, \bar{\alpha}^2, -1$ 。于是存在常数 A, B, C , 使得 $a_{2n} = A\alpha^{2n} + B\bar{\alpha}^{2n} + C(-1)^n$ 。数列 $\{a_{2n}\}$ 的初值为 $a_0 = 1, a_2 = 1, a_4 = 4$, 于是 A, B, C 满足下列三元一次方程:

$$A + B + C = 1, \quad A\alpha^2 + B\bar{\alpha}^2 - C = 1, \quad A\alpha^4 + B\bar{\alpha}^4 + C = 4,$$

$$\text{解得 } A = \frac{3 + \sqrt{5}}{10} = \frac{\alpha^2}{5}, \quad B = \frac{3 - \sqrt{5}}{10} = \frac{\bar{\alpha}^2}{5}, \quad C = \frac{2}{5},$$

$$a_{2n} = \frac{\alpha^{2n+2} + \bar{\alpha}^{2n+2}}{5} + (-1)^n \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{\alpha^{n+1} - \bar{\alpha}^{n+1}}{\sqrt{5}}\right)^2 = F_{n+1}^2,$$

于是 a_{2n} 是完全平方数。 □

例 10.12. 已知函数 $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{3x^2 + 1}$, 数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 满足 $x_1 = 2$, $n \geq 1$ 时 $x_{n+1} = f(x_n)$ 。设 $b_n = \log_3\left(\frac{x_n - 1}{x_n + 1}\right)$, 求 $\{b_n\}$ 的递推式, 并在此基础上求 $\{b_n\}, \{x_n\}$ 的通项。

$$\text{证. } x_{n+1} - 1 = \frac{(x_n - 1)^3}{3x_n^2 + 1}, \quad x_{n+1} + 1 = \frac{(x_n + 1)^3}{3x_n^2 + 1}, \quad \frac{x_{n+1} - 1}{x_{n+1} + 1} = \left(\frac{x_n - 1}{x_n + 1}\right)^3 \quad \square$$

11 导数的定义与性质

例 11.1 (伯努利不等式). 设实数 $x > -1$, α 是实数。我们有: (1) $\alpha > 1$ 时, $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$; (2) $0 < \alpha < 1$ 时, $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$; (3) $\alpha < 0$ 时, $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$ 。以上三问中等号成立当且仅当 $x = 0$ 。

证. 设 $f(x) = (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x$, 则 $f'(x) = \alpha[(1+x)^{\alpha-1} - 1]$ 。(1) (3) 若 $\alpha > 1$ 或 $\alpha < 0$, 则当 $x > 0$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增; 当 $x < 0$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减, 所以 $f(x) \geq f(0) = 0$ 。(2) 若 $0 < \alpha < 1$, 则当 $x > 0$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减; 当 $x < 0$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增, 所以 $f(x) \leq f(0) = 0$ 。注: $1 + \alpha x$ 是 $(1+x)^\alpha$ 在 $x = 0$ 处的切线, 所以伯努利不等式其实讲的是幂函数的切线放缩。 □

例 11.2. 设 $a > 0, a \neq 1$ 。(1) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$; (2) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$ 。提示: 可以先考虑 $a = e$ 的情形。

解. (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln[(1+x)^{\frac{1}{x}}] = \ln[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}] = 1$ 。于是 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x \ln a} = \frac{1}{\ln a}$ 。(2) 设 $y = e^x - 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1$ 。于是 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \cdot \ln a = \ln a$ 。 □

例 11.3. 设 $\alpha \in \mathbb{R}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$ 。

解. 设 $y = (1+x)^\alpha - 1$, 则 $\ln(1+y) = \alpha \ln(1+x)$. 于是 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\ln(1+x)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)}$.
 $\frac{\ln(1+y)}{\ln(1+x)} = \alpha$. □

例 11.4 (幂函数的导数). 设 $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \alpha x^{\alpha-1}$, 即 $f'(x) = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

证. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+\frac{h}{x})^\alpha - 1}{h/x} \cdot x^{\alpha-1} = \alpha x^{\alpha-1}$ □

例 11.5 (正弦和余弦的导数). (1) 设 $f(x) = \sin x$, 则 $f'(x) = \cos x$, 即 $(\sin x)' = \cos x$. (2) 设 $g(x) = \cos x$, 则 $g'(x) = -\sin x$, 即 $(\cos x)' = -\sin x$.

证. (1) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos(x + \frac{h}{2})}{h} = \cos x$;
 (2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{h}{2} \sin(x + \frac{h}{2})}{h} = -\sin x$. □

例 11.6 (指数函数的导数). 设 $f(x) = e^x$, 则 $f'(x) = e^x$, 即 $f(x) = e^x$. 一般地, 对任意 $a > 0$, 我们有 $(a^x)' = a^x \ln a$.

证. □

例 11.7 (对数函数的导数). 设 $f(x) = \ln x$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x}$, 即 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. 一般地, 对任意 $a > 0$, $a \neq 1$, 我们有 $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

证. □

例 11.8 (反三角函数的导数). 使用反函数的求导法则证明: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$. 至此, 我们已经得到所有基本初等函数 (幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数) 的导数公式。

证. □

例 11.9 (双曲函数和反双曲函数的定义及导数公式). (1) 双曲函数的定义如下: 双曲正弦 $\operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, 双曲余弦 $\operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, 双曲正切 $\operatorname{th}x = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

(2) 反双曲函数的函数的定义如下: 反双曲正弦 $\operatorname{arsh}x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 反双曲余弦 $\operatorname{arch}x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, 反双曲正切 $\operatorname{arth}x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. 试验证它们确实满足如下关系: $x = \operatorname{sh}(\operatorname{arsh}x)$, $x = \operatorname{ch}(\operatorname{arch}x)$, $x = \operatorname{th}(\operatorname{arth}x)$.

(3) 求证: $(\operatorname{sh}x)' = \operatorname{ch}x$, $(\operatorname{ch}x)' = \operatorname{sh}x$, $(\operatorname{th}x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, $(\operatorname{arsh}x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $(\operatorname{arch}x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$,
 $(\operatorname{arth}x)' = \frac{1}{1-x^2}$.

证. □

12 导数的应用

例 12.1. 设 $x > -1$, 求证: $\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$ ①, 这是 $\frac{1}{n+1} \leq \ln(1+n) \leq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ 的推广。

证. (1) 设 $f(x) = \ln(1+x) - x$, 则 $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{x+1}$. $x > 0$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减; $-1 < x < 0$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增. 于是对任意 $x > -1$, 都有 $f(x) \leq f(0) = 0$, 即 $\ln(1+x) \leq x$.

(2) 法一: $\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x)$ ② $\iff -\ln(1+x) \leq -\frac{x}{x+1}$, 由 (1) 的结论, $-\ln(1+x) = \ln \frac{1}{1+x} = \ln(1 - \frac{x}{1+x}) \leq -\frac{x}{1+x}$, 所以②式成立, ①式成立。

法二: $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$, 则 $f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$. $x > 0$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增; $-1 < x < 0$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减. 于是对任意 $x > -1$, 都有 $f(x) \geq f(0) = 0$, 即 $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x)$. \square

例 12.2. 求证: 对任意不相等的正实数 x, y , 都有 $\frac{1}{\sqrt{xy}} > \frac{\ln x - \ln y}{x - y} > \frac{2}{x + y}$ ①。

证. (1) 先证明①式右边. 法一: 不妨设 $x > y$, 因为 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ ②, 所以有

$$\ln x - \ln y = \int_y^x \frac{1}{t} dt = \int_y^x \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{x+y-t} \right) dt > \int_y^x \frac{2}{x+y} dt = \frac{2(x-y)}{x+y},$$

这里使用了 $a = t, b = x + y - t$ 时的②式. 于是①式成立。

法二: (1) 先证明 $y = 1, x > 1$ 的情形. 要证 $x > 1$ 时, $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1} = 2 - \frac{4}{x+1}$. 设 $f(x) = \ln x - 2 + \frac{4}{x+1}$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} > 0$. 于是 $x > 1$ 时 $f(x)$ 单调增, $f(x) > f(1) = 0$, $\frac{\ln x}{x-1} > \frac{2}{x+1}$. (2) 再证明 y 为任意正实数, $x > y$ 的情形, 此时①式 $\iff \frac{\ln(x/y)}{\frac{x}{y}-1} > \frac{2}{\frac{x}{y}+1}$, 因为 $\frac{x}{y} > 1$, 由情形 (1) 知上式成立. 注: 此做法中 $f'(x)$ 是有理函数, 从某种意义上讲是最简单的方法。

$f'(x)$ 在 $x = 1$ 处有二阶零点, $f(x)$ 在 $x = 1$ 处有三阶零点, $\frac{f(x)}{x-1} = \frac{\ln x}{x-1} - \frac{2}{x+1}$ 在 $x = 1$ 处有二阶零点。

法三: 我们证明 $x > 1$ 时, $(x+1)\ln x > 2(x-1)$ ③. 设 $f(x) = (x+1)\ln x - 2(x-1)$, $t = x-1$, 则 $f'(x) = \frac{x+1}{x} + \ln x - 2 = \ln x - \frac{x-1}{x} = \ln(1+t) - \frac{t}{t+1} > 0$. 所以 $x > 1$ 时, $f(x) > f(1) = 0$, ③式成立。

法四: 只考虑 $y = 1, x > 1$ 的情形. 设 $t = \ln x$, 则①式 $\iff \frac{e^t - 1}{t} < \frac{e^t + 1}{2}$ ④. 设 $f(t) = (t-2)e^t + t + 2$, 则 $f'(t) = e^t(t-1) + 1$ ⑤. $x > 1$ 时, $t > 0$, $f''(t) = te^t > 0$, $f'(t)$ 单调增, $f'(t) > f'(0) = 0$, $f(t)$ 单调增, $f(t) > f(0) = 0$, $t(e^t + 1) > 2(e^t - 1)$, ④式成立. 还有别的方法: $t > 1$ 时⑤式右边 > 0 . 下面考察 $t < 1$ 的情形, 此时 $e^{-t} \geq 1 - t$, $e^t = \frac{1}{e^{-t}} \leq \frac{1}{1-t}$, 于是⑤式右边 $\geq \frac{1}{1-t}(t-1) + 1 = 0$.

(2) 再证明①式右边. 只考虑 $y = 1, x > 1$ 的情形, 要证 $\frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{\ln x}{x-1}$ ⑥. \square

例 12.3 (折射定律). 费马提出光在一组不同介质中, 从一点出发传播到另一点时, 沿所需时间为极值的路线传播. 试由此推出斯涅尔的折射定律: 当光从介质1传播到介质2时, 设光两种介质中传播速度分别为 v_1, v_2 , 入射角、折射角如图分别为 θ_1, θ_2 , 则有 $\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}$.

证. \square

例 12.4. 设 A, ω, φ 为常数, $y = A \sin(\omega x + \varphi)$, 求证: $y'' + \omega^2 y = 0$.

证.

□

例 12.5 (幂平均不等式). (1) 设 n 为正整数, $\alpha > \beta > 0$, 对于 $1 \leq i \leq n$, 有正实数 x_i . 则我们有 $(\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \dots + x_n^\alpha}{n})^{\frac{1}{\alpha}} \geq (\frac{x_1^\beta + x_2^\beta + \dots + x_n^\beta}{n})^{\frac{1}{\beta}}$ ①.

(2) 加权形式: 在 (1) 问条件的基础上还有正实数 $w_i, 1 \leq i \leq n$, 且 $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. 则我们有 $(w_1 x_1^\alpha + w_2 x_2^\alpha + \dots + w_n x_n^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \geq (w_1 x_1^\beta + w_2 x_2^\beta + \dots + w_n x_n^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$ ②.

证. 先给一个使用局部不等式的证法. (1) 我们先证明 $\beta = 1, \alpha > 1$ 的情形. 设 $s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$,

$$\text{①式} \iff \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^\alpha \geq s^\alpha \iff \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{s}\right)^\alpha \geq n, \quad \text{③}$$

由伯努利不等式, $(\frac{x_i}{s})^\alpha = [1 + (\frac{x_i}{s} - 1)]^\alpha \geq 1 + \alpha(\frac{x_i}{s} - 1)$, 将上式对 $i = 1, 2, \dots, n$ 求和, 得

$$\text{③式左边} \geq n + \alpha \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{s} - 1\right) = n, \quad \text{③, ①式成立.}$$

对任意的 $\alpha > \beta > 0$, 设 $\gamma = \frac{\alpha}{\beta} > 1, y_i = x_i^\beta, 1 \leq i \leq n$. 则 ①式 $\iff (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$. 此即先前证明的 $\gamma > 1 > 0$ 的情形, 于是 ①式得证.

(2) 类似地, 我们先证明 $\beta = 1, \alpha > 1$ 的情形. 设 $s = \sum_{i=1}^n w_i x_i$, 则

$$\text{②式} \iff \sum_{i=1}^n w_i x_i^\alpha \geq s^\alpha \iff \sum_{i=1}^n w_i \left(\frac{x_i}{s}\right)^\alpha \geq 1, \quad \text{④}$$

由伯努利不等式, $(\frac{x_i}{s})^\alpha = [1 + (\frac{x_i}{s} - 1)]^\alpha \geq 1 + \alpha(\frac{x_i}{s} - 1)$, 将上式对 $i = 1, 2, \dots, n$ 求和, 得

$$\text{④式左边} \geq \sum_{i=1}^n w_i + \alpha \sum_{i=1}^n w_i \left(\frac{x_i}{s} - 1\right) = 1, \quad \text{④, ②式成立.}$$

对任意的 $\alpha > \beta > 0$, 设 $\gamma = \frac{\alpha}{\beta} > 1, y_i = x_i^\beta, 1 \leq i \leq n$. 则 ②式 $\iff (\sum_{i=1}^n w_i y_i^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} \geq \sum_{i=1}^n w_i y_i$. 此即先前证明的 $\gamma > 1 > 0$ 的情形, 于是 ②式得证. □

例 12.6 (Young不等式). 正实数 x, y, p, q 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 求证: $\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq xy$.

证.

□

例 12.7 (加权的均值不等式). (1) 二元情形: 设 $\alpha, \beta > 0$ 且 $\alpha + \beta = 1$, 求证: 对任意 $x, y > 0$, 都有 $\alpha x + \beta y \geq x^\alpha y^\beta$ ①.

(2) 一般情形: 设 n 为正整数, 对于 $1 \leq i \leq n$, 有 $\alpha_i > 0, x_i > 0$, 且 $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. 则我们有 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \geq x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ ②.

证. (1) ①式 $\iff \alpha\left(\frac{x}{y}\right) + \beta \geq \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha$. 设 $t = \frac{x}{y}$, 由伯努利不等式, 上式左边 $= 1 + \alpha(t-1) \geq (1+(t-1))^\alpha = t^\alpha =$ 上式右边. 所以①式成立.

(2) (1) 问中已经证明 $n = 2$ 时命题成立. 假设命题对 $n - 1$ 成立, 则 □

例 12.8. 设函数 $u = u(x)$ 和 $v = v(x)$ 都在 x_0 处 n 阶可导, 则在 x_0 处有: (1) $(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$;

(2) 对任意正整数 n , $(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot u^{(i)}v^{(n-i)}$. 这被称为莱布尼茨公式.

证. □

例 12.9. (1) 求函数 $f(x) = x^3 - 8x^2 + 13x - 6$ 的单调递减区间. (2) 设 $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, 求它在 $x \in [-1, 2]$ 时的最大值和最小值. (3) 设 $f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 求 $f(x)$ 的值域.

证. □

例 12.10. (1) 若函数 $f(x) = \frac{ax}{x^2 + b}$ ($a > 0$)在 $x = -1$ 处取得极值 -2 , 求 a, b 的值. (2) 若函数 $f(x) = ax - \sin x$ 是 \mathbb{R} 上的单调增函数, 求 a 的取值范围.

证. □

例 12.11. (1) 求函数 $f(x) = |x - 1| + |x - 3| + e^x$ 的最小值. (2) 已知函数 $f(x) = x^2 - 2\ln x$, 若存在 $x_1, x_2, \dots, x_n \in [\frac{1}{e}, e]$, 使得 $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) = f(x_n)$ 成立, 求 n 的最大值.

证. □

13 复数与多项式

例 13.1. 设 n 为正整数, $\epsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$. 求证: (1) 若 $n \mid m$, 则 $\sum_{k=0}^{n-1} \epsilon_k^m = n$; (2) 若 $n \nmid m$, 则 $\sum_{k=0}^{n-1} \epsilon_k^m = 0$.

证. 法二: $n \nmid m$ 时, 设 $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, $F = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{km}$, 则 $\omega^m \cdot F = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{km} \cdot \omega^m = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(k+1)m} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{km} = F$, $(\omega^m - 1)F = 0$, $F = 0$. □

例 13.2. 设 $x \in \mathbb{R}, n \geq 1$, 求证: (1) $\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$;

(2) $\sin(nx) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \sin(x + \frac{k\pi}{n})$.

证. (1) 法一: 考察等式 $\sum_{j=0}^{n-1} z^j = \prod_{k=1}^{n-1} (z - e^{i\frac{2k\pi}{n}})$ ④, 令 $z = 1$, 则④式左边 $= n > 0$, 所以

$$n = \text{④式右边} = |\text{④式右边}| = \prod_{k=1}^{n-1} |1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}| = \prod_{k=1}^{n-1} 2 \sin \frac{k\pi}{n} = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n},$$

于是②式成立. 法二: 由①式,

$$n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(nx)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2^{n-1} \sin x}{x} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \sin(x + \frac{k\pi}{n}) \right] = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n},$$

所以②式成立。(2) 由 $z^n - 1$ 的因式分解, 我们有

$$\sin(nx) = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}) = \frac{e^{-inx}}{2i}(e^{2inx} - 1) = \frac{e^{-inx}}{2i} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} (e^{2ix} - e^{-2\pi i \frac{k}{n}}), \quad (3)$$

$$e^{2ix} - e^{-2\pi i \frac{k}{n}} = e^{i(x - \pi \cdot \frac{k}{n})} \cdot (e^{i(x + \frac{k\pi}{n})} - e^{-i(x + \frac{k\pi}{n})}) = 2i \cdot e^{i(x - \pi \cdot \frac{k}{n})} \sin(x + \frac{k\pi}{n}),$$

$$\text{③式右边} = e^{-inx} (2i)^{n-1} e^{inx} e^{-i \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{\pi}{n}} \prod_{k=0}^{n-1} \sin(x + \frac{k\pi}{n}) = \text{①式右边},$$

所以①式成立。□

例 13.3. 已知复数 a, b, c 满足 $a^2 + ab + b^2 = 1$, $b^2 + bc + c^2 = -1$, $c^2 + ca + a^2 = i$, 求 $ab + bc + ca$ 的值。

解. 设 $u = a + b + c$, $v = ab + bc + ca$, 我们试图解出 u, v . ① + ② + ③, 得:

$$1 - 1 + i = i = 2(a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ca) = 2u^2 - 3v, \quad (4)$$

①, ②, ③式左边两两相乘再相加, 得:

$$\begin{aligned} -1 - i + i = -1 &= \sum (a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2) = \sum (b^4 + a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + ab^3 + b^3c \\ &+ abc^2 + ab^2c + a^2bc) = (a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3) + 3(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) + 3abc(a + b + c) \\ &= u(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) + 3v^2 = u(u^3 - 3uv) + 3v^2 = u^4 - 3u^2v + 3v^2, \quad (5) \end{aligned}$$

由④式得 $u^2 = \frac{i+3v}{2}$, 代入⑤式, 得:

$$-1 = \left(\frac{i+3v}{2}\right)^2 - 3v \frac{i+3v}{2} + 3v^2 = \frac{i+3v}{2} \cdot \frac{i-3v}{2} + 3v^2 = \frac{3v^2-1}{4}, \quad 3v^2-1 = -4$$

所以 $v^2 = -1$, $v = \pm i$. 下面验证存在原方程组①, ②, ③的解使得 $v = i$ 或 $v = -i$ 成立: ①, ②, ③式左边两两相减, 得:

$$(a-c)(a+b+c) = 2, \quad (b-c)(a+b+c) = 1-i, \quad (b-a)(a+b+c) = -1-i, \quad (6)$$

(1) 找到原方程组得一组解使得 $v = i$: 此时 $u^2 = \frac{i+3v}{2} = 2i$, $u = \pm(1+i)$. 取 $u = a + b + c = 1 + i$, 代入⑥式得:

$$a - c = \frac{2}{1+i} = 1 - i, \quad b - c = \frac{1-i}{1+i} = -i, \quad b - a = -1,$$

于是 $3b = (a + b + c) + b - c + b - a = 1 + i - i - 1 = 0$, $b = 0$, $a = b - (b - a) = 1$, $c = b - (b - c) = i$, 经验证它们满足原方程组, 且 $ab + bc + ca = i$.

(2) 找到原方程组得一组解使得 $v = -i$: 此时 $u^2 = \frac{i+3v}{2} = -i$, $u = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}}$. 取 $u = a + b + c = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$, 代入⑥式得:

$$a - c = \frac{2\sqrt{2}}{1-i} = \sqrt{2}(1+i), \quad b - c = \sqrt{2}, \quad b - a = \frac{\sqrt{2}(-1-i)}{1-i} = -\sqrt{2}i,$$

于是 $3b = (a + b + c) + b - c + b - a = \frac{1-i}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} - \sqrt{2}i = \frac{3(1-i)}{\sqrt{2}}$, $b = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$, $a = b - (b - a) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $c =$

$b - (b - c) = \frac{-1 - i}{\sqrt{2}}$, 经验证它们满足原方程组, 且 $ab + bc + ca = 1 - 1 - i = -i$ 。

注: 使用上述方法可以求出原方程组的所有解。 □

例 13.4. 已知复数 a, b, c 满足 $a^2 = b - c$, $b^2 = c - a$, $c^2 = a - b$, 设 $u = a + b + c$, $v = ab + bc + ca$, $w = abc$ 。

(1) 求证: $v = \frac{u^2}{2}$, $w = \frac{u^3}{6}$; (2) 求 $a + b + c$ 的值。

证. 我们有

$$\begin{aligned} \sum a^2 = u^2 - 2v = \sum (b - c) = 0, \quad \sum a^3 = u(u^2 - 3v) + 3w = \sum a(b - c) = 0, \\ \sum a^4 = -2 \sum a^2 b^2 = -2v^2 + 4uw = \sum a^2(b - c) = (a - b)(b - c)(a - c) = -a^2 b^2 c^2 = -w^2, \end{aligned}$$

于是 $v = \frac{u^2}{2}$, $-\frac{1}{2}u^3 + 3w = 0$, $w = \frac{u^3}{6}$, $-\frac{1}{2}u^4 + \frac{4}{6}u^4 = -\frac{u^6}{36}$, $u = 0, \pm\sqrt{6}i$ 。下面证明存在满足原方程组的 $a, b, c \in \mathbb{C}$ 使得 $a + b + c = 0, \pm\sqrt{6}i$ 。(1) 若 $u = 0$, 则 $v = w = 0$, $(x - a)(x - b)(x - c) = x^3$, $a = b = c = 0$, 此时原方程组成立且 $a + b + c = 0$ 。(2) 若 $u = \pm\sqrt{6}i$, 则 $v = -3, w = -u$ 。设 $f(x) = x^3 - ux^2 - 3x + u$, 由代数基本定理知存在 $a, b, c \in \mathbb{C}$ 使得 $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ 。于是 $b + c = u - a$, $bc = v - a(u - a)$,

$$\begin{aligned} (b - c)^2 &= (u - a)^2 - 4(v - a(u - a)) = -3a^2 + 2ua + 6, \\ a^4 &= ua^3 + 3a^2 - ua = u(ua^2 + 3a - u) + 3a^2 - ua = -3a^2 + 2ua + 6 = (b - c)^2, \end{aligned}$$

所以 $a^2 = b - c$ 或 $c - b$ 。不妨设 $a^2 = b - c$ (否则可以将 b, c 调换以满足此式), 同理可得 $b^2 = c - a$ 或 $a - c$, $c^2 = a - b$ 或 $b - a$ 。若 $b^2 = c - a$, 则 $c^2 = -a^2 - b^2 = a - b$, 此时原方程组成立且 $a + b + c = u$ 。同理, 若 $c^2 = a - b$, 原方程组也成立且 $a + b + c = u$ 。最后一种情况是 $b^2 = a - c$ 且 $c^2 = b - a$, 此时 $0 = a^2 + b^2 + c^2 = 2(b - c) = 2a^2$, $a = 0$, 这与 $abc = -u \neq 0$ 矛盾! 综上, 我们按上述过程找到的 a, b, c 确实满足原方程组, 且 $a + b + c = u$ 。

注: 第三个方程也可以这样列: $\sum a^4 = -2v^2 + 4uw = \sum (b - c)^2 = 2u^2 - 6v$, 于是 $-\frac{1}{2}u^4 + \frac{4}{6}u^4 = -u^2$, 同样得到 $u = 0, \pm\sqrt{6}i$ 。 □

例 13.5. 求证: 对任意正整数 $n \geq 2$ 和任意实数 x , 都有 $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(x + \frac{2k\pi}{n}) = 0$, $\sum_{k=0}^{n-1} \sin(x + \frac{2k\pi}{n}) = 0$ ①。

证. 设 $\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, 我们有

$$0 = e^{ix}(1 + \omega + \dots + \omega^{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(x + \frac{2k\pi}{n})} = \sum_{k=0}^{n-1} (\cos(x + \frac{2k\pi}{n}) + i \sin(x + \frac{2k\pi}{n})),$$

分别取上式的实部和虚部即得①式成立。 □

例 13.6. 设 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, 使得对任何实数 x 都有 $f(x) = 1 + a \sin x + b \cos x + c \sin 2x + d \cos 2x \geq 0$ 。求证: 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $f(x) \leq 3$ 。

证. 我们证明对任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $f(x) + f(x + \frac{2\pi}{3}) + f(x - \frac{2\pi}{3}) = 3$ ①。在上一题中令 $n = 3$, 得

$$\cos x + \cos(x + \frac{2\pi}{3}) + \cos(x - \frac{2\pi}{3}) = 0, \quad \sin x + \sin(x + \frac{2\pi}{3}) + \sin(x - \frac{2\pi}{3}) = 0,$$

类似地, 在以上两式中用 $2x$ 代替 x , 有

$$\begin{aligned} \cos 2x + \cos 2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos 2\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) &= 0, & \sin 2x + \sin 2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin 2\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) &= 0, \\ \text{于是①式左边} &= 3 + a(\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)) + b(\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)) \\ &+ c(\sin 2x + \sin 2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin 2\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)) + d(\cos 2x + \cos 2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos 2\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)) = 3, \end{aligned}$$

①式得证, 所以 $f(x) \leq$ ①式左边 $= 3$. □

例 13.7. 给定素数 $p \geq 5$, 求证: $(x^2 + x + 1)^p$ 的 p 次项系数模 p^2 余1。

证. 设 $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $\bar{\omega} = \omega^2 = e^{\frac{4\pi i}{3}}$, 则 $x^2 + x + 1 = (x - \omega)(x - \bar{\omega})$,

$$\begin{aligned} (x - \omega)^p &= \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} x^j (-\omega)^{p-j}, & (x - \bar{\omega})^p &= \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} x^j (-\bar{\omega})^{p-j}, \\ [x^p](x^2 + x + 1)^p &= [x^p](x - \omega)^p(x - \bar{\omega})^p = \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \binom{p}{p-j} (-\omega)^{p-j} (-\bar{\omega})^j, \end{aligned} \quad \text{①}$$

①式右边各项中, $j = 0, p$ 的两项和为 $(-\omega)^p + (-\bar{\omega})^p = -(\omega + \bar{\omega}) = 1$. $1 \leq j \leq p-1$ 时, $p \mid \binom{p}{j}$,

$$\frac{1}{p^2} \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p}{j} \binom{p}{p-j} (-\omega)^{p-j} (-\bar{\omega})^j = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{(p-1)!^2}{j!^2 (p-j)!^2} [(-\omega)^{p-j} (-\bar{\omega})^j + (-\omega)^j (-\bar{\omega})^{p-j}], \quad \text{②}$$

②式右边中括号内 $= (-1)^p(\omega^{p-j+2j} + \omega^{j+2p-2j}) = -(\omega^{p+j} + \omega^{-p-j}) \in \mathbb{Z}$, 所以②式右边为整数,

$$p^2 \mid \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p}{j} \binom{p}{p-j} (-\omega)^{p-j} (-\bar{\omega})^j, \text{ 由①式知 } [x^p](x^2 + x + 1)^p \equiv 1 \pmod{p^2}. \quad \square$$

例 13.8. 设 $a_0 > a_1 > a_2 > \dots > a_n > 0$, 求证: $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$ ①的一切复根都在单位圆的内部, 即它们的模全小于1。

证. $0 \leq i \leq n-1$ 时, 设 $b_i = a_i - a_{i+1}$, 以及 $b_n = a_n$, 由题设条件知 $b_i > 0$, $0 \leq i \leq n$. 由阿贝尔变换, 我们有

$$\begin{aligned} f(x) &= (a_0 - a_1)x^n + (a_1 - a_2)(x^n + x^{n-1}) + \dots + (a_{n-1} - a_n)(x^n + x^{n-1} + \dots + x) + a_n(x^n + x^{n-1} + \dots + 1) \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot [b_0(x^n - x^{n+1}) + b_1(x^{n-1} - x^{n+1}) + \dots + b_n(1 - x^{n+1})], \end{aligned} \quad \text{②}$$

假设待证命题不成立, 即存在 $x \in \mathbb{C}, |x| \geq 1$ 使得①式成立, 则因为 $f(1) = \sum_{i=1}^n a_i > 0$, 所以 $x \neq 1$. 由②式, 我们有

$$\begin{aligned} b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n &= (b_0 + b_1 + \dots + b_n)x^{n+1}, \\ b_0 + b_1 + \dots + b_n &= \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{x^{i+1}} = \left| \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{x^{i+1}} \right| \leq \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{|x^{i+1}|} \leq \sum_{i=0}^n b_i, \end{aligned} \quad \text{③}$$

不等式③左右两边相同，所以中间的不等号均取等。第一处不等号取等当且仅当 $\arg \frac{b_0}{x} = \arg \frac{b_1}{x^2} = \dots = \arg \frac{b_n}{x^{n+1}}$ ，即 $\arg x = 0$ 。第二处不等号取等当且仅当 $|x| = 1$ 。由以上两个条件知 $x = 1$ ，矛盾！所以①式的所有复根都在单位圆内部。 \square

14 不定积分和定积分

例 14.1 (2009, 高联). 设 n 为正整数, 求证: $-1 < \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2+1} - \ln n \leq \frac{1}{2}$ ①。

证. (1) 因为 $\frac{k}{k^2+1} \geq \frac{1}{k+1}$, $\frac{n+2}{2} > \frac{n}{e}$, 所以 $\sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2+1} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} > \int_2^{n+2} \frac{dx}{x} = \ln(n+2) - \ln 2 > \ln n - 1$, ①式左边成立。

(2) 因为 $\frac{k}{k^2+1} \leq \frac{1}{k}$, 所以 $\sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2+1} \leq \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2} + \int_{k=1}^n \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} + \ln n - \ln 1 = \frac{1}{2} + \ln n$, ①式右边成立。 \square

例 14.2 (1996, 中国数学奥林匹克). 设 n 为正整数, $x_0 = 0$, $1 \leq i \leq n$ 时 $x_i > 0$, 且 $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. 求

证: $1 \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+x_1+\dots+x_{i-1}} \cdot \sqrt{x_i+\dots+x_n}} < \frac{\pi}{2}$ ①。

证. $0 \leq i \leq n$ 时, 设 $y_i = \sum_{j=0}^i x_j$, ①式中间 = F , 则 $y_0 = 0$, $y_n = 1$, $0 \leq y_i \leq 1$. 于是

$$F = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{1+y_{i-1}} \cdot \sqrt{1-y_{i-1}}} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{1-y_{i-1}^2}} \geq \sum_{i=1}^n x_i = 1,$$

另一边, $y_{i-1} < t < y_i$ 时, $\frac{1}{\sqrt{1-y_{i-1}^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, 所以

$$\frac{x_i}{\sqrt{1-y_{i-1}^2}} = \int_{y_{i-1}}^{y_i} \frac{dt}{\sqrt{1-y_{i-1}^2}} < \int_{y_{i-1}}^{y_i} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = [\arcsin t]_{y_{i-1}}^{y_i} = \arcsin(y_i) - \arcsin(y_{i-1}),$$

$$F < \sum_{i=1}^n [\arcsin(y_i) - \arcsin(y_{i-1})] = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2},$$

综上所述, ①式成立。 \square

例 14.3 (2022, 全国卷II高考). 已知函数 $f(x) = xe^{ax} - e^x$, a 为实数. (1) 当 $a = 1$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性; (2) 当 $x > 0$ 时, $f(x) < -1$, 求 a 的取值范围; (3) 设 n 为正整数, 求证: $\sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}} > \ln(n+1)$ ①。

证. (1) $f'(x) = xe^x$, $x > 0$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增; $x < 0$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减。

(2) a 的取值范围为 $(-\infty, \frac{1}{2}]$. 必要性: 若 $x > 0$ 时, $f(x) < -1$, 则 $f(0) = -1$, $f'(x) = (1+ax)e^{ax} - e^x$, $f'(0) = 0$, $f''(x) = (2a+ax)e^{ax} - e^x$, $f''(0) = 2a-1$. 假设 $a > \frac{1}{2}$, 则 $f''(0) > 0$, 因为 $f''(x)$ 连续, 所以存

在 $\epsilon > 0$, 使得 $|x| < \epsilon$ 时 $f''(x) > 0$ 。于是 $x \in (0, \epsilon)$ 时 $f'(x)$ 单调增, $f'(x) > f'(0) = 0$ 。所以 $x \in (0, \epsilon)$ 时 $f(x)$ 单调增, $f(x) > f(0) = -1$, 矛盾! 所以 $a \leq \frac{1}{2}$ 。充分性: 若 $a \leq \frac{1}{2}$, 则当 $x > 0$ 时, $f'(x) = (1+ax)e^{ax} - e^x = e^{ax}(1+ax - e^{(1-a)x}) < e^{ax}[1+ax - (1+(1-a)x)] = (2a-1)xe^{ax} \leq 0$ 。于是 $x > 0$ 时 $f(x)$ 单调减, $f(x) < f(0) = -1$ 。

(3) 我们宣称 $x > 0$ 时, $\ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ ②。证明如下: 法一: 即证明 $x > 0$ 时, $\sqrt{1+x}\ln(1+x) < x$ 。设 $\ln(1+x) = t$, 上式 $\iff te^{t/2} < e^t - 1$ 。设 $g(t) = e^t - te^{t/2} - 1$, 则 $g'(t) = e^t - e^{t/2} - \frac{t}{2}e^{t/2} = e^{t/2}(e^{t/2} - 1 - \frac{t}{2})$ 。 $t > 0$ 时 $e^{t/2} > 1 + \frac{t}{2}$, $g'(t) > 0$, $g(t)$ 单调增, $g(t) > g(0) = 0$, ②式成立。所以 $j \geq 1$ 时, $\ln(1+\frac{1}{j}) < \frac{1/j}{\sqrt{1+1/j}} = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}$ 。于是①式左边 $> \sum_{j=1}^n (\ln(j+1) - \ln j) = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$ 。

注: $t = 0$ 处 $g'(t)$ 有二阶零点, $g(t)$ 有三阶零点。此方法即 (1) 问中 $a = \frac{1}{2}$ 的情形。

法二: 设 $\sqrt{1+x} = 1+t$, 则②式 $\iff 2\ln(1+t) < \frac{(1+t)^2 - 1}{1+t} = \frac{t^2 + 2t}{1+t} = t(1 + \frac{1}{1+t})$ 。设 $h(t) = t(1 + \frac{1}{1+t}) - 2\ln(1+t)$, 我们有 $h'(t) = (1 + \frac{1}{1+t}) - \frac{t}{(1+t)^2} - \frac{2}{1+t} = \frac{t^2}{(1+t)^2}$ 。 $t > 0$ 时 $h'(t) > 0$, $h(t)$ 单调增, 所以 $h(t) > h(0) = 0$ 。注: $t = 0$ 处 $h'(t)$ 有二阶零点, $h(t)$ 有三阶零点。此方法的优越性在于 $h'(t)$ 是有理式, 不包含超越函数。 \square

例 14.4 (2024, 清华新领军一试). 证明极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nx^n e^x dx$ 存在并求出它的值。

证. 法一: 设 $I_n = \int_0^1 (n+1)x^n e^x dx$, 我们证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = e$ ①。对任意 $\epsilon \in (0, 1)$, 令 $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, 我们有

$$I_n > \int_{1-\delta}^1 (n+1)x^n e^x dx > e^{1-\delta} \int_{1-\delta}^1 (n+1)x^n dx = e^{1-\delta} [x^{n+1}]_{1-\delta}^1 = e^{1-\delta} [1 - (1-\delta)^{n+1}],$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1-\delta)^{n+1} = 0$, 所以存在正整数 N 使得 $n > N$ 时, $1 - e^{-\frac{\epsilon}{2}} > (1-\delta)^{n+1}$ 。此时 $I_n > e^{1-\delta} [1 - (1-\delta)^{n+1}] > e^{1-\frac{\epsilon}{2}} e^{-\frac{\epsilon}{2}} = e^{1-\epsilon}$ 。又因为 $I_n < e \int_0^1 (n+1)x^n dx = e$, 所以 $n > N$ 时, $e^{1-\epsilon} < I_n < e$, $|I_n - e| < e - e^{1-\epsilon} = e(1 - e^{-\epsilon}) < e\epsilon$, 这说明①式成立。于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nx^n e^x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot I_n = e$ 。

法二: 设 $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$, $n \geq 0$, 则 $n \geq 1$ 时, $I_n = \int_0^1 x^n de^x = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - \int_0^1 nx^{n-1} e^x dx = e - nI_{n-1}$, $\frac{(-1)_n^n}{n!} = \frac{(-1)^n e}{n!} + \frac{(-1)^{n-1} I_{n-1}}{(n-1)!}$ 。设 $a_n = \frac{(-1)^n I_n}{n!}$, $n \geq 0$, 则

$$a_0 = I_0 = e - 1, \quad a_n = a_{n-1} + e \cdot \frac{(-1)^n}{n!} = a_0 + e \cdot \left(\frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{(-1)^1}{1!} \right) =$$

\square

例 14.5 (2024, 清华新领军8月零试). 设实数 a, b 使 $I = \int_0^{2\pi} (x^2 - a \cos x - b \sin x)^2 dx$ 取到最小值, 求 a, b 的值。

证. 设 $u(x), v(x)$ 是 $[0, 2\pi]$ 上的实值连续函数。定义它们的内积为 $\langle u, v \rangle = \int_0^{2\pi} u(x)v(x)dx$, 。设 $f(x) = x^2 - a \cos x - b \sin x$, 则 I 取最小值时, $\langle f(x), \cos x \rangle = \langle f(x), \sin x \rangle = 0$ 。 \square

例 14.6.

证.

□

例 14.7.

证.

□