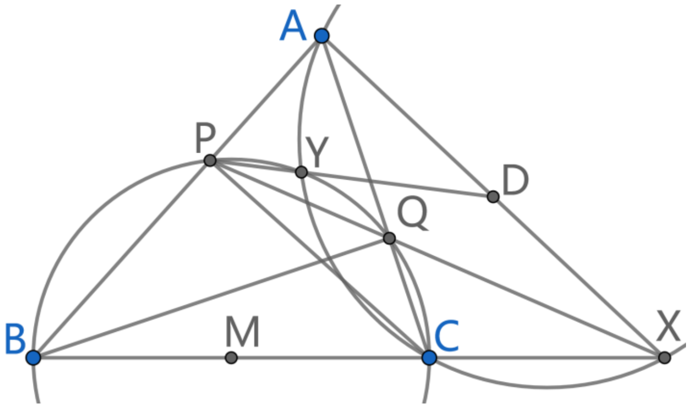
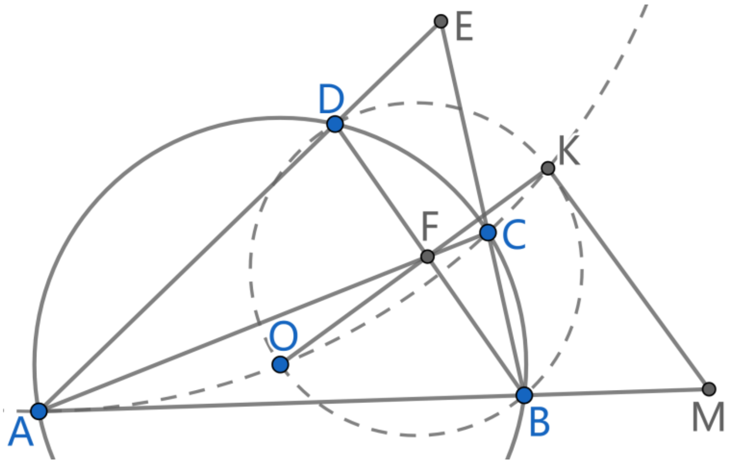
几何选讲-2

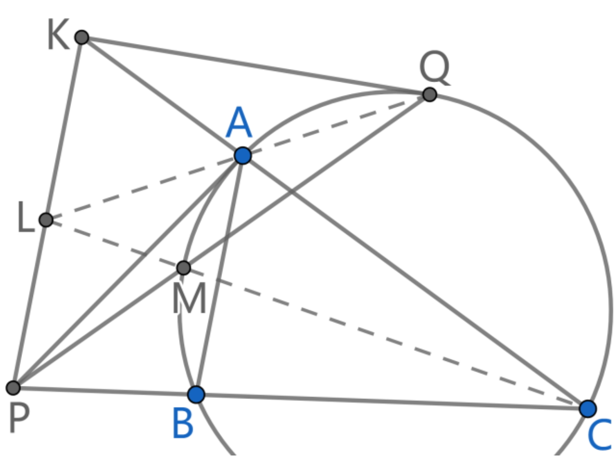
例 1. 锐角$\triangle ABC$中，$AB>AC$，CP,BQ分别为AB,AC边上的高，P,Q为垂足。直线PQ交BC于X。$\triangle AXC$外接圆与$\triangle PQC$外接圆再次相交于点Y。求证：PY平分AX。



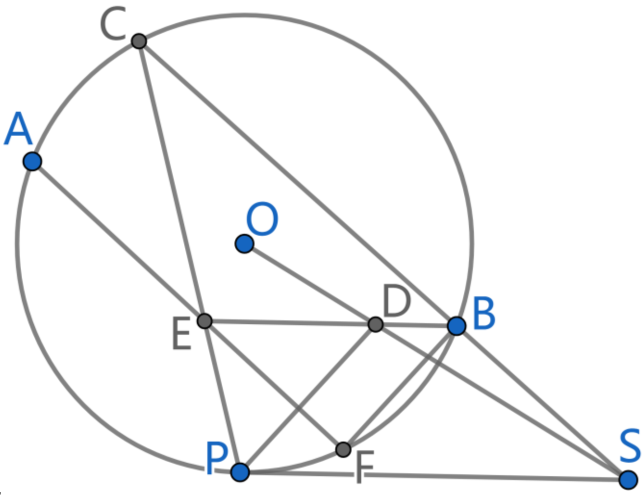
例 2. 四边形$ABCD$内接于$\odot O$，直线CD交AB于M（$MB<MA$，$MC<MD$），K是$\odot(AOC)$与$\odot(DOB)$除点O外的另一个交点。求证：$\angle MKO=\dfrac{\pi}{2}$。



例 3. 圆ω是$\triangle ABC$的外接圆，M是弧AB的中点，过A作ω的切线交直线BC于P，直线PM交ω于Q（异于M），过Q作ω的切线交AC于K。求证：$AB /\!/ PK$。



例 4. 过以 AB 为直径的 $\odot O$ 外一点 S 作该圆的切线 SP， P 为切点，直线 SB 与 $\odot O$ 相交于 B 和 C，过 B 作 PS 的平行线，分别与直线 OS, PC 相交于 D 和 E，延长 AE 与 $\odot O$ 相交于 F。求证： $PD /\!/ BF$。



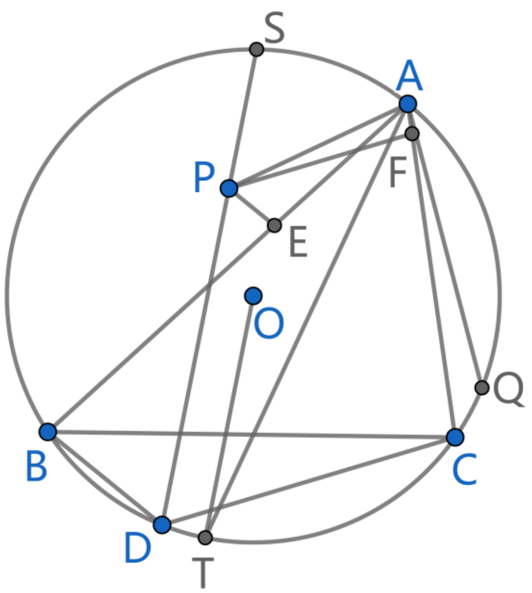
.

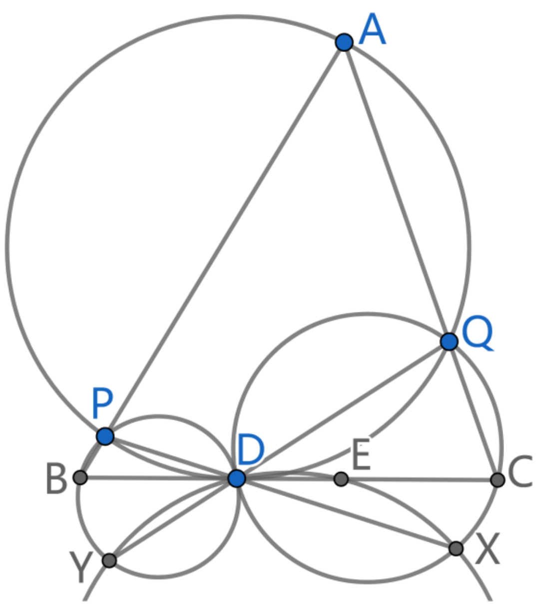
例 5.（加强的欧拉不等式）回忆：设 $\triangle ABC$ 的外心、内心分别为 O, I，则由欧拉定理，我们有 $R^2-2Rr=OI^2\geq 0, R\geq 2r$。试证明下列不等式，它比上述欧拉不等式更强：

$$\frac{R}{r}\geq\frac{abc+a^3+b^3+c^3}{2abc}\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-1\geq\frac{2}{3}(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})\geq 2。$$

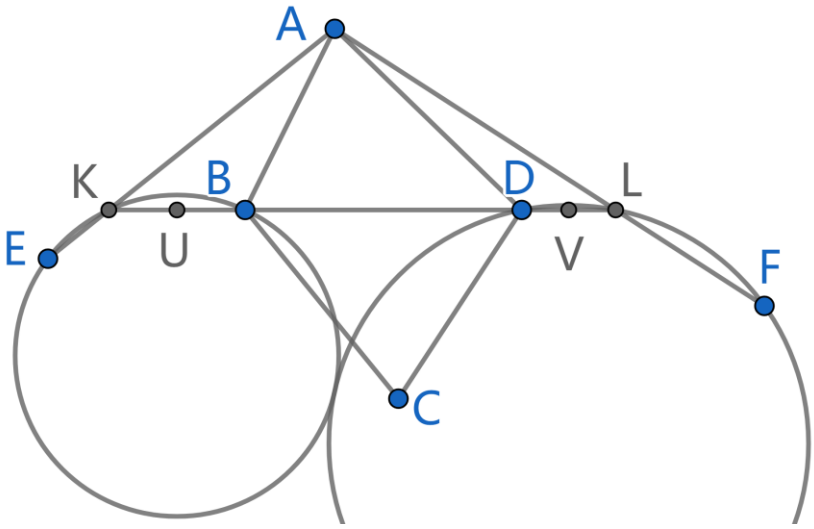
例 6. 设 $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆， D 是弧 BC （不含 A）上的一点， S 是弧 BAC 的中点。P 为线段 SD 上一点，过 P 作 DB 的平行线交 AB 于点 E，过 P 作 DC 的平行线交 AC 于点 F，过 O 作 SD 的平行线交弧 $\overset{\frown}{BDC}$ 于点 T。已知 $\odot O$ 上的点 Q 满足 $\angle QAP$ 被 AT 平分，求证： $QE=QF$。

例 7. 设四边形 $APDQ$ 内接于圆 Γ，过 D 作 Γ 的切线与直线 AP, AQ 分别交于 B, C 两点。延长 PD 交 $\triangle CDQ$ 的外接圆于点 X，延长 QD 交 $\triangle BDP$ 的外接圆于点 Y。设 $\triangle DXY$ 的外接圆交 BC 于点 D, E，求证： $BD=CE$。

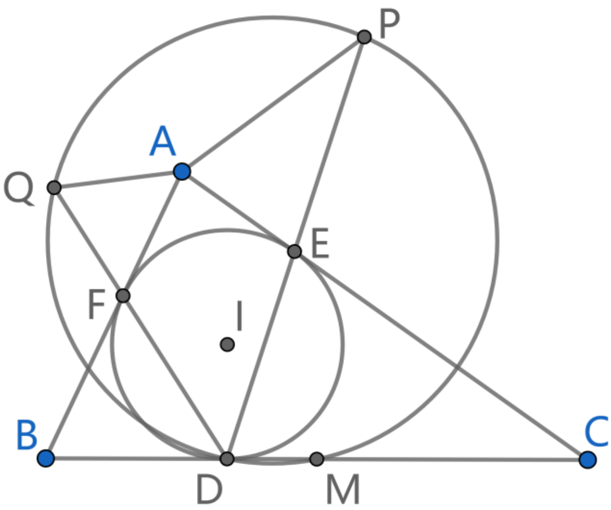




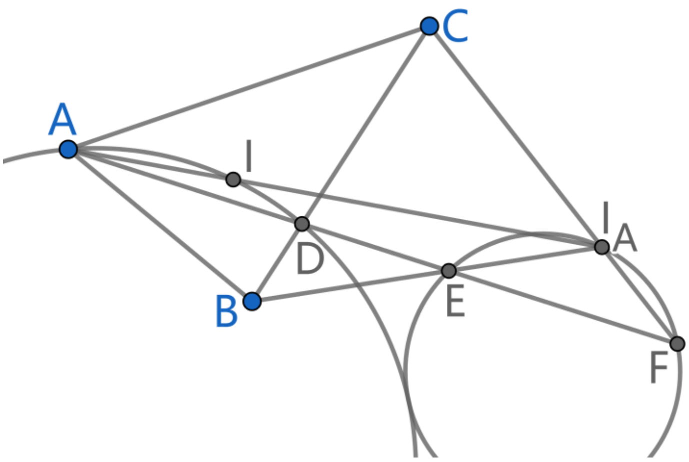
例 8. 设凸四边形 $ABCD$ 满足 $\angle ABC > \dfrac{\pi}{2}, \angle CDA > \dfrac{\pi}{2}, \angle DAB = \angle BCD$。记 E, F 分别为点 A 关于直线 BC, CD 的对称点。设线段 AE, AF 分别与直线 BD 交于点 K, L。求证：$\triangle BEK$ 和 $\triangle DFL$ 的外接圆相切。



例 9. 不等边 $\triangle ABC$ 的内切圆与边 BC, CA, AB 分别相切于点 D, E, F。在 $\triangle ABC$ 外部构造 $\triangle APE, \triangle AQF$，使得 $AP = PE, AQ = QF, \angle APE = \angle ACB, \angle AQF = \angle ABC$。设 M 是边 BC 的中点，请用 $\triangle ABC$ 的三个内角来表示 $\angle QMP$。

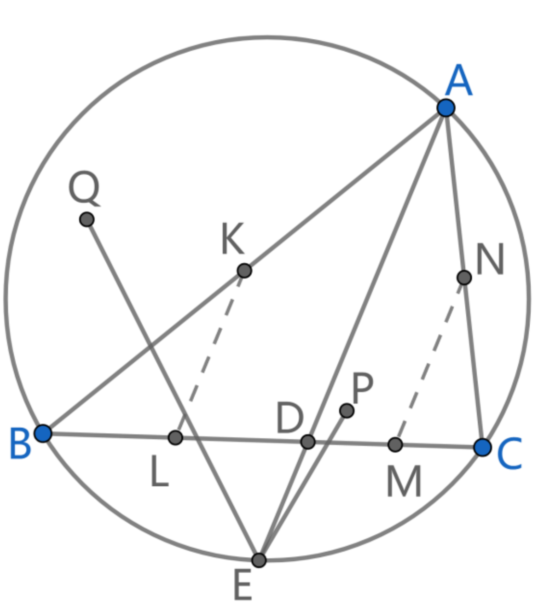


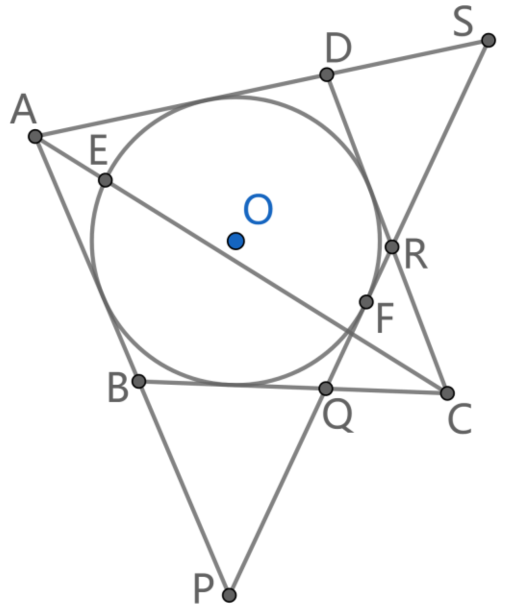
例 10. 设锐角$\triangle ABC$的内心为I，点A所对的旁心为I_A。若$AB<AC$，设D为$\triangle ABC$内切圆与边BC的切点，直线AD直线BI_A, CI_A分别交于点E, F。求证：$\odot(AID)$与$\odot(I_AEF)$相切。



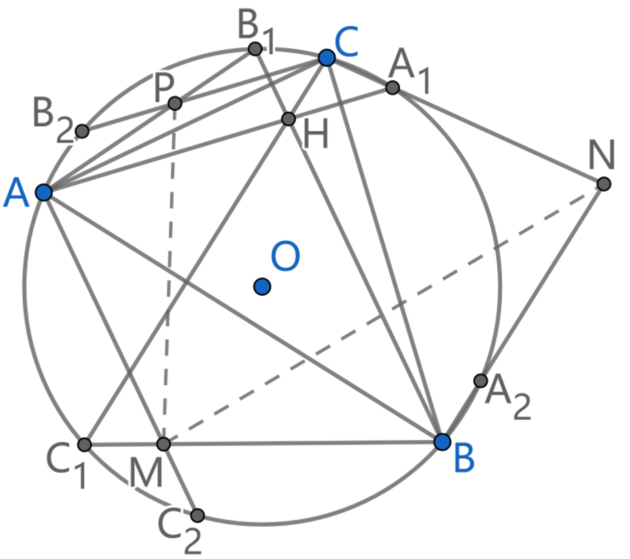
例 11. 在$\triangle ABC$中，$\angle A$的平分线交BC于点D，交$\triangle ABC$的外接圆于点E。设K, L, M, N分别为AB, BD, DC, CA的中点，P, Q分别是$\triangle EKL, \triangle EMN$的外心。求证：$\angle PEQ = A$。

例 12. 四边形$ABCD$外切于圆ω，设E是AC与ω的交点中离A较近的那一个，F是E在ω上的对径点。设ω过F的切线与直线AB, BC, CD, DA分别交于点P, Q, R, S。求证：$PQ = RS$。

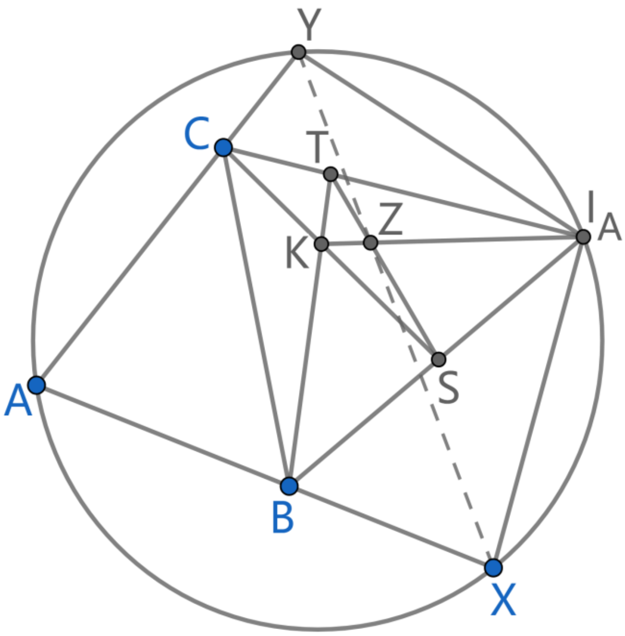




例 13. 设 O, H 分别是锐角 $\triangle ABC$ 的外心和垂心，Γ 是其外接圆。延长 AH, BH, CH 分别交 Γ 于点 A_1, B_1, C_1，过 A_1, B_1, C_1 分别作 BC, CA, AB 的平行线与 Γ 再交于点 A_2, B_2, C_2。设 M, N, P 分别是 AC_2 与 BC_1，BA_2 与 CA_1，CB_2 与 AB_1 的交点。求证：$\angle MNB = \angle AMP$。



例 14. $\triangle ABC$ 中，I_A 是点 A 所对的旁心。一个经过 A, I_A 的圆与 AB, AC 的延长线分别交于点 X, Y。线段 I_AB 上一点 S 满足 $\angle CSI_A = \angle AYI_A$，线段 I_AC 上一点 T 满足 $\angle BTI_A = \angle AXI_A$。设 K 是 BT, CS 的交点，Z 是 ST, I_AK 的交点。求证：X, Y, Z 三点共线。



例 15.（2015，欧洲女奥）设 H,G 分别是锐角 $\triangle ABC\,(AB\neq AC)$ 的垂心和重心，直线 AG 与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于另一点 P 。设 P' 是点 P 关于直线 BC 的对称点。求证：$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$ 当且仅当 $HG=GP'$ 。