数列和函数的极限

一、知识要点

定义 1.（数列的极限）给定数列$\{x_n\}_{n\geq 1}$。(1) 若存在常数a，使得对于任意给定的正数ϵ（不论它多么小），总存在正整数N，使得当$n>N$时，总有$|x_n-a|<\epsilon$，那么就称常数a是数列$\{x_n\}$的极限，或者称数列$\{x_n\}$收敛于a，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，或$x_n\to a,(n\to\infty)$。如果不存在这样的常数$a$，就说数列$\{x_n\}$没有极限，或者说数列$\{x_n\}$是发散的。

（2）若对任意给定的正数M（不论它多么大），总存在正整数N，使得：(i)当$n>N$时，总有$|x_n|>M$，那么就称数列$\{x_n\}$趋于无穷，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$，或$x_n\to\infty,(n\to\infty)$；(ii) 当$n>N$时，总有$x_n>M$，那么就称数列$\{x_n\}$趋于正无穷，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，或$x_n\to+\infty,(n\to\infty)$；(iii)当$n>N$时，总有$x_n<-M$，那么就称数列$\{x_n\}$趋于负无穷，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$，或$x_n\to-\infty,(n\to\infty)$。

性质 1.（收敛数列的性质）（1）唯一性：若数列$\{x_n\}$收敛，那么它的极限唯一。

（2）有界性：若数列$\{x_n\}$收敛，那么该数列一定有界。

（3）保号性：若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,a>0$，那么存在正整数$N$，使得对$n>N$，都有$x_n>0$。类似地，若$a<0$，则对充分大的$n$有$x_n<0$。

（4）若$x_n\geq 0,n\geq 1$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$a\geq 0$。这是保号性的推论。

性质 2.（数列极限的四则运算）设$\{x_n\}_{n\geq 1},\{y_n\}_{n\geq 1}$是两个数列。若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，则有：（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=A\pm B$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=A\cdot B$；（3）当$y_n\neq 0,n\geq 1$且$B\neq 0$时，有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{A}{B}$。本定理即：数列和差积商的极限等于极限的和差积商。

定义 2.（函数的极限）（1）设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，若存在常数 A，使得对于任意给定的正数 ϵ（不论它多么小），总存在正数 δ，使得当 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足 $|f(x)-A|<\epsilon$，那么就称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，或 $f(x)\to A,(x\to x_0)$。

（2）设函数 $f(x)$ 在 x_0 大于某一正数时有定义，若存在常数 A，使得对于任意给定的正数 ϵ（不论它多么小），总存在正数 X，使得当 x 满足 $|x|>X$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足 $|f(x)-A|<\epsilon$，那么就称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，或 $f(x)\to A,(x\to\infty)$。类似地可以定义 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$（将上述 $|x|>X$ 改为 $x>X$），以及 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$（将上述 $|x|>X$ 改为 $x<-X$）。

定理 1.（函数极限与数列极限的关系）存在函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是，对任意 $f(x)$ 定义域内满足 $x_n\neq x_0, n\geq 1$ 且收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$（即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$），都有相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}_{n\geq 1}$ 收敛于 A，即 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$。注：证明充分性适合用反证法，即由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq A$ 推出存在满足 $x_n\neq x_0, n\geq 1$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ 的数列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq A$。

定义 3.（函数的无穷小与无穷大）（1）若函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的极限为零，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小。

（2）设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内（或 x_0 大于某一正数时）有定义，若对于任意给定的正数 M（不论它多么大），总存在正数 δ（或正数 X），使得当 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta$（或 $|x|>X$）时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足 $|f(x)|<M$，那么就称函数 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$

（或 $x\to\infty$）时的无穷大，记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$， $f(x)\to\infty,(x\to x_0)$（或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$，$f(x)\to\infty,(x\to\infty)$）。类似地可以定义 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$， 以及 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ 。

性质 3.（函数极限的性质）（1）唯一性：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，那么这个极限唯一。

（2）局部有界性：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，那么存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|<M$ 。

（3）局部保号性：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, A>0$ （或 $A<0$），那么存在常数 $\delta>0$， 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，都有 $f(x)>0$ （或 $f(x)<0$）。

（4）若在 x_0 的某个去心邻域内 $f(x)\geq 0$（或 $f(x)\leq 0$），且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $A\geq 0$ （或 $A\leq 0$）。这是局部保号性的推论。

性质 4.（函数极限的四则运算）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则有：

（1） $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$；（2） $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$；（3） 当 $B\neq 0$ 时， 有 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$。将上述 $x\to x_0$ 改为 $x\to\infty$， 命题同样成立。本定理即：函数和差积商的极限等于极限的和差积商。

推论 1.（1）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，c 为常数，则 $\lim\limits_{x\to x_0}(cf(x))=c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 。（2）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在， n 为正整数，则 $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)^n)=(\lim\limits_{x\to x_0} f(x))^n$ 。上述 $x\to x_0$ 可改为 $x\to\infty$ 。

定理 2.（夹逼准则）若数列 $\{x_n\}_{n\geq 1},\{y_n\}_{n\geq 1},\{z_n\}_{n\geq 1}$ 满足条件：（1）存在正整数 n_0， 使得对任意的 $n>n_0$， 都有 $y_n\leq x_n\leq z_n$；（2） $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$； 那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，

且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 。上述数列极限存在准则可以推广到函数的极限：如果函数 $f(x), g(x), h(x)$ 满足（1）当 $|x-x_0|<r, x\neq x_0$ 时，$g(x)\leq f(x)\leq h(x)$；（2）$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$，那么存在极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$。

定理 3.（单调有界原理）单调有界数列必有极限。回忆性质 1（2），即收敛数列的有界性，我们得到了下列结论：单调数列有极限的充要条件是它有界。

二、例题精讲

例 1. 求证：（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$，这就是《庄子》里所说的“一尺之棰，日取其半，万世不竭”。

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，以上两例说明求极限不保持严格的不等号，即有可能 $x_n > A, n\geq 1$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$。

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$；

（4）设 $x_n = 0.999...9$，小数点后有 n 个 9，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$。

例 2. 求下列极限：（1）$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-5x+3}$；（2）$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-3}{x^2-5x+4}$；（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$；

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}$；（6）$\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}$。

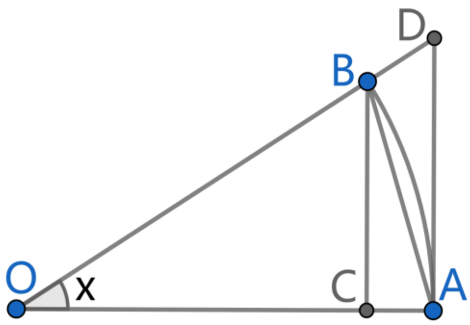
例 3. 设 $m,n\in\mathbb{N}$，多项式 $P(x)=\sum_{i=0}^{m}a_i x^i, Q(x)=\sum_{i=0}^{n}b_i x^i, a_m\neq 0, b_n\neq 0$，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}0, n>m,\\ \frac{a_m}{b_n}, n=m,\\ \infty, n<m,\end{cases}$$

例 4.（1）回忆扇形的面积公式，求证：$0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，我们有 $\sin x<x<\tan x$，所以 $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\setminus\{0\}$ 时，有 $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$；

（2）证明 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ 时，$0<1-\cos x<\frac{x^2}{2}$，以及 $\lim_{x\to 0}\cos x=1$；

（3）使用夹逼准则证明下述极限：$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$。极限（3）说明了弧度制相比角度制的优越性：有关三角函数的许多重要公式在弧度制中，比在角度制中简单得多。



例 5. 求证：（1）$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$；（2）$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$；（3）$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$。

例 6. 设 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n, z_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}, n\geq 1.$，求证：（1）$(1+\frac{1}{n})^n<(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}, n\geq 1$，即数列 $\{x_n\}$ 单调递增；

（2）$(1+\frac{1}{n-1})^n>(1+\frac{1}{n})^{n+1}, n\geq 2$，即数列 $\{z_n\}$ 单调递减；

（3）$2=x_1\leq x_n<z_n\leq z_1=4, n\geq 1$，即数列 $\{x_n\},\{z_n\}$ 有界；

（4）由单调有界原理，数列$\{x_n\},\{z_n\}$的极限都存在，且

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}[x_n(1+\frac{1}{n})] = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} x_n$$ 。

定义 4. 设例 6 最后两个相等的极限为$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}$，称为自然常数。

定义 5. 给定数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$，令$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, n\geq 1$。我们定义级数或无穷级数为

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$，称$s_n$为上述级数的部分和，若$\lim_{n\to\infty} s_n$存在，就说级数收敛，

并定义$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n$；若$\lim_{n\to\infty} s_n$不存在，就说级数发散。

例 7. （1）$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots$称为等比级数或几何级数，它的部分和为

$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{1-q^n}{1-q}, n\geq 1$。$|q|\geq 1$时级数发散，$|q|<1$时级数收敛，此时因为

$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$，所以$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}$。

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$称为调和级数，因为从第二项开始每一项都是相邻两项

的调和平均值。设它的部分和为$s_n = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}, n\geq 1$，则$k\geq 0$时，由于

$s_{2^{k+1}} - s_{2^k} = \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}}\frac{1}{j} \geq \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}}\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$，所以$s_{2^k} = \sum_{i=1}^{k}(s_{2^i} - s_{2^{i-1}}) + s_1 \geq \frac{k}{2}+1$。对任

意的$n\geq 1$，令$k = \lfloor \log_2 n \rfloor$，则$s_n \geq s_{2^k} \geq \frac{k}{2}+1 = \frac{1}{2}\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$，所以

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$，调和级数发散。

例 8. 设 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n,\ y_n=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}, n\ge 1$，这里约定 $0!=1$。由 $k\ge 2$ 时 $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}<\frac{1}{k!}$ 和二项式定理，我们有 $(1+\frac{1}{n})^n=1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\ldots+\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}+\ldots+\frac{1}{n^n}<1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ 在 $n\ge 2$ 时成立，即 $x_n<y_n, n\ge 2$。

另一边，因为 $\lim_{n\to\infty}\binom{n}{j}\frac{1}{n^j}=\frac{1}{j!}, j\ge 1$，且 $1\le k\le n$ 时，$1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\ldots+\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\le x_n$，对上式取 $n\to\infty$ 的极限即得 $y_k\le \mathrm{e}$。所以 $x_n<y_n\le \mathrm{e}$，由夹逼准则，我们有 $\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}y_n$ $=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$。

例 9. 求证：对任意正整数 n，$n!\mathrm{e}$ 都不是整数，所以 e 是无理数。

例 10.（2012，高联 A 卷）对正整数 n，设 $S_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$，求证：对满足 $0\le a<b\le 1$ 的任意实数 a,b，数列 $\{S_n-\lfloor S_n\rfloor\}$ 中有无穷多项属于区间 (a,b)。

例 11.（2012，高联 B 卷）设数列 $\{x_n\}_{n\ge 0}$ 满足 $x_0>0, x_{n+1}=\sqrt{x_n+1}, n\ge 0$。求证：存在常数 $A>1$ 和常数 $C>0$，使得 $|x_n-A|<\frac{C}{A^n}$ 对任意正整数 n 成立。