

几何小测-3

例 1. 设 $A+B+C=\pi$, 求证: (1) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$;

(2) $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$ 。

例 2. 设 $A+B+C=\pi$, 求证: 对任意的实数 x, y, z , 均有

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2yz \cos A + 2zx \cos B + 2xy \cos C。$$

例 3. 设锐角 α, β 满足 $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta)$, 求证: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ 。

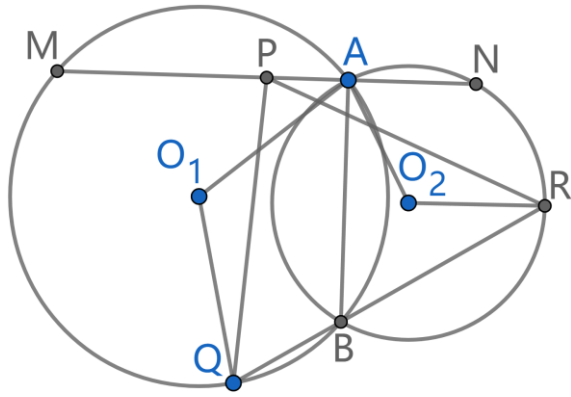
例 4. 设 a, b 为实数, 已知方程 $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ 至少有一个实数根, 求 $a^2 + b^2$ 的最小值。

例 5. 设 A, C, B, D 是直线上依次排列的四个点, O 是 CD 中点且 O 在 A, B 同侧。请分别从下列四个式子推出 A, B, C, D 是调和点列。

(1) $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{AC}$; (2) $OC^2 = OD^2 = OA \cdot OB$;
 (3) $AC \cdot AD = AB \cdot AO$; (4) $AB \cdot OD = AC \cdot BD$ 。



例 6. $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于 A, B , 过 A 作 AB 的垂线, 分别交 $\odot O_1, \odot O_2$ 于 M, N , P 是 MN 中点, 点 Q, R 分别在 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 上, $\angle AO_1Q = \angle AO_2R$ 。求证: $PQ = PR$ 。



例 7. 四边形 $ABCD$ 内接于圆, 过 AB 上一点 M 分别作 AD, CD, BC 的垂线, 垂足分别为

P, Q, R , PR 与 MQ 相交于 N 。求证: $\frac{PN}{NR} = \frac{AM}{BM}$ 。

