递推数列-1

一、知识要点

1. 斐波那契数列$\{F_n\}_{n\geq 1}$的定义如下：$F_1=F_2=1, F_n=F_{n-1}+F_{n-2}(n\geq 3)$。下面我们用三种方法求$\{F_n\}$的通项公式。

（1）特征根法：设$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \bar{\alpha}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，则$\alpha, \bar{\alpha}$是特征方程$x^2-x-1=0$的两根，于是$\alpha^n=\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}$，$\bar{\alpha}^n=\bar{\alpha}^{n-1}+\bar{\alpha}^{n-2}$。设$A, B$是待定的常数，满足$A\alpha+B\bar{\alpha}=1$，$A\alpha^2+B\bar{\alpha}^2=1$，我们可以用归纳法证明$F_n=A\alpha^n+B\bar{\alpha}^n$对任意$n\geq 1$成立。解上述关于$A, B$的二元一次方程得$A=\frac{1}{\sqrt{5}}, B=-\frac{1}{\sqrt{5}}$，于是我们有$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\bar{\alpha}^n)$
$=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$，这被称为 Binet 公式。

（2）裂项构造等比数列：$\alpha, \bar{\alpha}$满足$x^2-x-1=(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})=x^2-(\alpha+\bar{\alpha})x+\alpha\bar{\alpha}$，于是$n\geq 3$时，$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}=(\alpha+\bar{\alpha})F_{n-1}-\alpha\bar{\alpha}F_{n-2}$，$F_n-\alpha F_{n-1}=\bar{\alpha}(F_{n-1}-\alpha F_{n-2})$。设$G_n=F_n-\alpha F_{n-1}, n\geq 2$，则$G_2=1-\alpha=\bar{\alpha}$，$\{G_n\}_{n\geq 2}$是等比数列，
$G_n=\bar{\alpha}G_{n-1}=...=\bar{\alpha}^{n-2}G_2=\bar{\alpha}^{n-1}$。$F_n-\alpha F_{n-1}=\bar{\alpha}^{n-1}$，$F_n=F_n-\alpha F_{n-1}+\alpha(F_{n-1}-$
$\alpha F_{n-2})+...+\alpha^{n-2}(F_2-\alpha F_1)+\alpha^{n-1}F_1=\bar{\alpha}^{n-1}+\alpha\bar{\alpha}^{n-2}+...+\alpha^{n-2}\bar{\alpha}+\alpha^{n-1}=\frac{\alpha^n-\bar{\alpha}^n}{\alpha-\bar{\alpha}}$，我们再次得到了 Binet 公式。

(3) 母函数法：设$f(x)=\sum_{n\geq 1}F_nx^n$，则$f(x)=x+x^2+\sum_{n\geq 3}(F_{n-1}+F_{n-2})x^n=x+x^2$
$+\sum_{n\geq 2}F_nx^{n+1}+\sum_{n\geq 1}F_nx^{n+2}=x+x^2+x(f(x)-x)+x^2f(x)=x+xf(x)+x^2f(x)$，

$f(x)(1-x-x^2)=x$，$f(x)=\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{x}{(1-\alpha x)(1-\bar{\alpha}x)}=\frac{1}{\alpha-\bar{\alpha}}(\frac{1}{1-\alpha x}-\frac{1}{1-\bar{\alpha}x})$

$=\frac{1}{\alpha-\bar{\alpha}}(\sum_{n\geq 0}(\alpha x)^n-\sum_{n\geq 0}(\bar{\alpha}x)^n)=\sum_{n\geq 1}\frac{\alpha^n-\bar{\alpha}^n}{\alpha-\bar{\alpha}}x^n$，所以$F_n=\frac{\alpha^n-\bar{\alpha}^n}{\alpha-\bar{\alpha}}$。

2. 设数列$\{x_n\}_{n\geq 0}$满足x_0,x_1给定，$n\geq 2$时，$x_n=ax_{n-1}+bx_{n-2}$，a,b为常数，这被称为常系数二阶齐次线性递推数列，斐波那契数列就是一个例子。定义数列$\{x_n\}$的特征方程为$x^2-ax-b=0$，特征根为特征方程的两根。下面用特征根法求数列$\{x_n\}$的通项公式。

（1）特征方程无重根，$x^2-ax-b=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2),\alpha_1\neq\alpha_2$。可以用归纳法证明，存在常数$A_1,A_2$，使得$x_n=A_1\alpha_1^n+A_2\alpha_2^n$对任意$n\geq 0$成立。$A_1,A_2$由数列的初值确定，即$x_0=A_1+A_2$，$x_1=A_1\alpha_1+A_2\alpha_2$。解上述二元一次方程：$\alpha_2x_0-x_1=(\alpha_2-\alpha_1)A_1$，解得$A_1=\dfrac{\alpha_2x_0-x_1}{\alpha_2-\alpha_1}$，同理，$A_2=\dfrac{\alpha_1x_0-x_1}{\alpha_1-\alpha_2}$。这里用到了$\alpha_1\neq\alpha_2$。注：初值$x_0,x_1$和递推式中的$a,b$均为整数的数列$\{x_n\}$的通项中$\alpha_1,\alpha_2,A_1,A_2$可以为无理数甚至虚数。

（2）特征方程有重根，$x^2-ax-b=(x-\alpha)^2$，则$a=2\alpha,b=-\alpha^2,x_n=2\alpha x_{n-1}-\alpha^2x_{n-2}$。只考虑$\alpha\neq 0$的情形，此时$\dfrac{x_n}{\alpha^n}=\dfrac{2x_{n-1}}{\alpha^{n-1}}-\dfrac{x_{n-2}}{\alpha^{n-2}}$，于是$y_n=\dfrac{x_n}{\alpha^n},n\geq 0$满足$n\geq 2$时，$y_n=2y_{n-1}-y_{n-2}$，$\{y_n\}$是等差数列。存在常数$A,B$使得$y_n=An+B$，$x_n=(An+B)\alpha^n$。$A,B$由初值$x_0,x_1$确定，满足$x_0=B,x_1=(A+B)\alpha$，解得$A=\dfrac{x_1}{\alpha}-x_0$。

3. 设数列$\{a_n\}_{n\geq 0}$满足当$n\geq 0$时，$a_{n+1}=pa_n+q$，其中p,q为常数，这被称为常系数一阶线性递推数列。（1）$p=1$时，数列$\{a_n\}$即公差为q的等差数列；（2）$p\neq 1$时，可用不动点法求$\{a_n\}$的通项：设α满足$\alpha=p\alpha+q$（解得$\alpha=\dfrac{q}{1-p}$），设$n\geq 0$时$b_n=a_n-\alpha$，则$b_{n+1}=a_{n+1}-\alpha=pa_n+q-\alpha=p(a_n-\alpha)=pb_n$，$\{b_n\}_{n\geq 0}$是等比数列，$b_n=p^nb_0$，于是$a_n=p^n(a_0-\alpha)+\alpha$。

递推数列-1

二、例题精讲

例 1. 设 $\{F_n\}_{n\ge1}$ 为斐波那契数列，$F_1=F_2=1, F_{n+2}=F_{n+1}+F_n, n\ge1$。（1）求证：$F_n\equiv n\cdot 3^{n-1}(\text{mod } 5)$；（2）求 F_{2020} 的末位数；（3）求证：$n\ge1$时，$F_{n+60}\equiv F_n(\text{mod } 10)$。

例 2.（1994，高联）将与 105 互素的所有正整数从小到大排成数列，求该数列的第 1000 项。

例 3.（斐波那契数列的性质）设 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$，求证：（1）$n\ge1$时，$\sum_{i=1}^{n}F_i^2=F_nF_{n+1}$；

（2）$n\ge2$ 时，$F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2=(-1)^n$，于是$\prod_{i=2}^{\infty}(1+\dfrac{(-1)^i}{F_i^2})=\alpha$；

（3）$n\ge1$时，$F_n=\binom{n-1}{0}+\binom{n-2}{1}+\binom{n-3}{2}+\ldots=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n-1-k}{k}$；

（4）$n\ge1$时，$\sum_{i=0}^{n}\dfrac{1}{F_{2^i}}=3-\dfrac{F_{2^n-1}}{F_{2^n}}$，于是$\sum_{i=0}^{\infty}\dfrac{1}{F_{2^i}}=4-\alpha$；

（5）$n\ge1$时，$\sum_{i=1}^{n}\dfrac{(-1)^{i+1}}{F_iF_{i+1}}=\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$，于是$\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{i+1}}{F_iF_{i+1}}=\alpha-1$。

例 4. 数列$\{a_n\}_{n\ge1}$满足$a_1=1, a_2=5$，且$n\ge2$时，$a_{n+1}=\dfrac{a_na_{n-1}}{\sqrt{a_n^2+a_{n-1}^2+1}}$，求数列$\{a_n\}_{n\ge1}$的通项公式。

例 5.(2024, 高联预赛吉林)已知数列$\{a_n\}_{n\ge 1}$满足$a_1=1, a_2=2$, 且$n\ge 2$时$a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+a_{n-1}$。

求证: $\sum_{k=1}^{2024}\frac{1}{a_k}>88$。

例 6.（2024，高联预赛内蒙古）数列$\{a_n\}_{n\ge 1}$中，$a_1=\frac{1}{10}$，且对任意正整数n，有$a_{n+1}=a_n^2+a_n$，

求$\sum_{k=1}^{2024}\frac{1}{a_k+1}$的整数部分。

例 7.（2024，高联预赛上海）设数列$\{a_n\}_{n\ge 1}$满足：$a_1=a_2=1, a_{n+2}=a_{n+1}+a_n, (n\ge 1)$，

M是大于1的正整数。求证：在数列$a_3, a_4, a_5, \ldots$中存在相邻的两项，它们除以M的余数相等。

例 8.（2023，高联预赛甘肃）已知数列$\{a_n\}_{n\ge 1}$中，$a_1=2$，且$n\ge 1$时$a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n+2}$。求证：

（1）$a_n\le\frac{1}{2^{n-2}}$；（2）$\frac{2a_1}{a_1+2}+\frac{4a_2}{a_2+2}+\ldots+\frac{2na_n}{a_n+2}<4$。