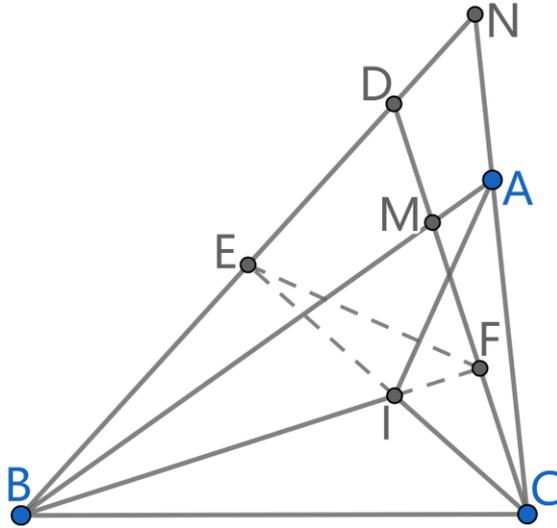


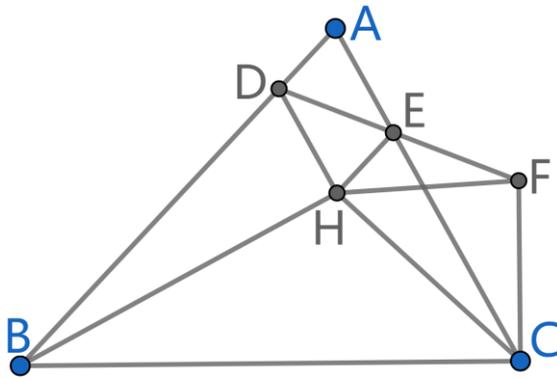
综合练习-1

一、小蓝本平面几何

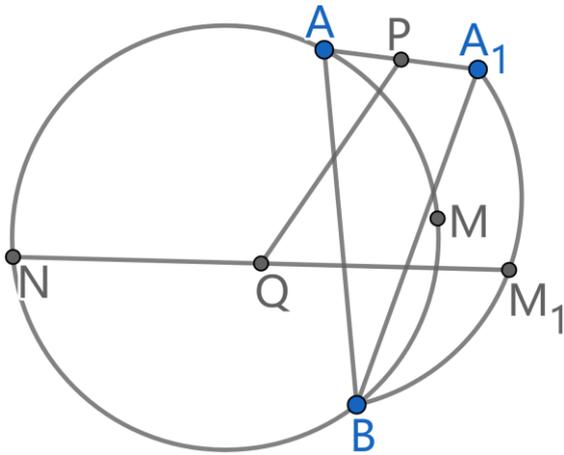
例 1. (P14, 习题 6)  $\triangle ABC$  的内心为  $I$ , 过  $B$  作  $l_B \perp CI$ , 过  $C$  作  $l_C \perp BI$ ,  $D$  是  $l_B, l_C$  的交点。若  $l_B$  交  $AC$  于点  $N$ ,  $l_C$  交  $AB$  于点  $M$ , 线段  $BN, CM$  的中点分别为  $E, F$ 。求证:  $EF \perp AI$ 。



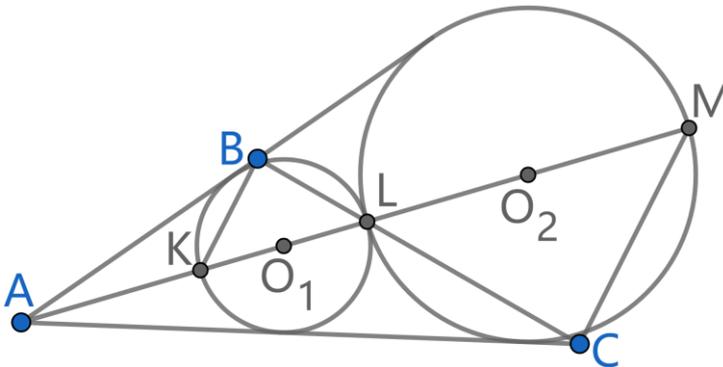
例 2. (P14, 习题 8) 设  $H$  为锐角  $\triangle ABC$  的垂心, 过点  $H$  作垂直于  $BH$  的直线交  $AB$  于点  $D$ , 过点  $H$  作垂直于  $CH$  的直线交  $AC$  于点  $E$ , 过点  $C$  作垂直于  $BC$  的直线交  $DE$  于点  $F$ 。求证:  $FH = FC$ 。



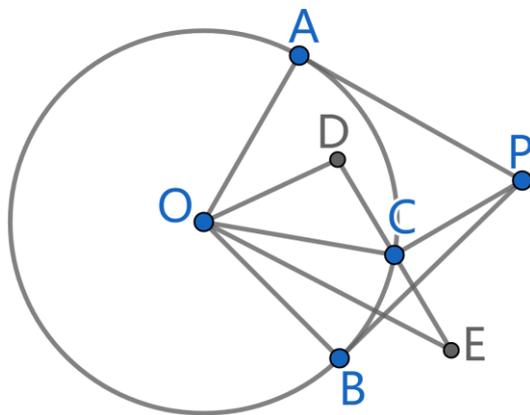
例 3. (P15, 习题 11)  $\odot O$  的一条弦  $AB$  将圆分成两部分,  $M, N$  分别是两段弧的中点, 以  $B$  为旋转中心, 将弓形  $AMB$  按顺时针方向旋转一个角度形成弓形  $A_1M_1B$ 。若  $AA_1$  的中点为  $P$ ,  $M_1N$  的中点为  $Q$ , 求证:  $M_1N = 2PQ$ 。



例 4. (P15, 习题 15) 圆  $\omega$  与  $\triangle ABC$  的边  $AC, AB$  相切, 圆  $\Omega$  与边  $AC$  和  $AB$  的延长线相切, 且与  $\omega$  相切于边  $BC$  上的  $L$  点。直线  $AL$  分别与圆  $\omega$  和  $\Omega$  第二次相交于点  $K$  和  $M$ 。已知  $KB \parallel CM$ , 求证:  $\triangle LCM$  是等腰三角形。

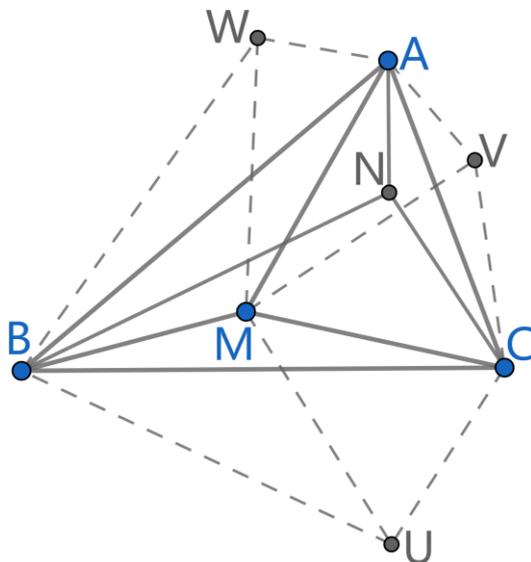


例 5. (P16, 习题 16)  $PA, PB$  为  $\odot O$  的切线, 点  $C$  在劣弧  $AB$  上 (不含点  $A, B$ )。过点  $C$  作  $PC$  的垂线  $l$ , 与  $\angle AOC$  的平分线交于点  $D$ , 与  $\angle BOC$  的平分线交于点  $E$ 。求证:  $CD = CE$ 。



例 6. (P16, 习题 17) 设  $M, N$  是  $\triangle ABC$  内部的两个点, 且满足  $\angle MBA = \angle NBC$ ,

$\angle MAB = \angle NAC$ 。求证:  $\frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \frac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB} = 1$ 。



## 二、数列练习

例 7. (1) 数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  满足  $a_1 = 2$ ,  $n \geq 1$  时,  $a_{n+1} = \frac{2(n+2)}{n+1} \cdot a_n$ , 求  $a_{100}$ 。

(2) 数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  满足  $a_1 = 2$ ,  $n \geq 1$  时,  $a_n + a_{n+1} = 1$ 。设  $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ , 求  $S_{1001} - 2S_{1000} + S_{999}$ 。

例 8. (1) 数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  满足  $a_1 = 3$ ,  $n \geq 1$  时,  $a_{n+1} = 2a_n + 3$ , 求  $\{a_n\}$  的通项。

(2) 数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  满足  $a_1 = 1, a_2 = 3$ , 且对任意正整数  $n$ , 都有  $a_{n+2} \leq a_n + 3 \cdot 2^n$  且  $a_{n+1} \geq 2a_n + 1$ , 求  $\{a_n\}$  的通项。

(3) 数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  满足  $a_1 = 2$ , 且  $n \geq 1$  时,  $a_{n+1} = 4a_n + 2^{n+1}$ , 求  $\{a_n\}$  的通项。

(4) 数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  满足  $a_1 = 2$ , 且  $n \geq 1$  时,  $a_{n+1} = 2a_n^3$ , 求  $\{a_n\}$  的通项。

综合练习-1

例 9. (1) 数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  中,  $a_1 = 1$ ,  $n \geq 2$  时,  $a_n = \frac{n}{n-1} a_{n-1} + 2n \cdot 3^{n-2}$ , 求  $\{a_n\}$  的通项。

(2) 数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  中,  $a_1 = 2$ ,  $n \geq 1$  时,  $(n+1)a_{n+1} = a_n + n$ , 求  $\{a_n\}$  的通项。

例 10. 已知数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  满足  $a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $n \geq 1$  时,  $a_{n+1} = \frac{na_n}{(n+1)(na_n+1)}$ , 求  $\{a_n\}$  的通项。

例 11. 设正数数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  满足  $a_0 = a_1 = 1$ ,  $n \geq 2$  时,  $\sqrt{a_n a_{n-2}} - \sqrt{a_{n-1} a_{n-2}} = a_{n-1}$ , 求  $\{a_n\}$  的通项。

例 12. 已知数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  满足  $a_1 = 0$ ,  $n \geq 1$  时,  $a_{n+1} = a_n + 1 + 2\sqrt{1+a_n}$ , 求  $\{a_n\}$  的通项。

例 13. 设数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  满足  $a_1 = 2$ ,  $a_{m+n} + a_{m-n} - m + n = \frac{1}{2} \cdot (a_{2m} + a_{2n})$ , 其中  $m, n$  为任意

满足  $m \geq n$  的自然数。求证: 对任意  $n \geq 0$ , 都有  $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$ ; (2)

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{1000}} < 1。$$