综合小测-4

例 1. 求证：任意正整数 N 可以唯一地表示成不同且不相邻的斐波那契数之和，即存在唯一的正整数 m 和一列指标 $\{i_j\}_{j=1}^{m}$，使得 $2\le i_1<i_2<...<i_m, i_j-i_{j-1}\ge 2\,(2\le j\le m)$，且 $N=\sum_{j=1}^{m}F_{i_j}$。这里 $F_1=F_2=1, F_{n+2}=F_{n+1}+F_n\ (n\ge 1)$。

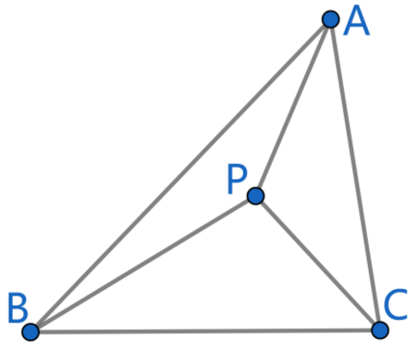
例 2. 数列 $\{a_n\}_{n\ge 1}$ 满足 $a_1=1, a_2=-1$，且 $a_{n+2}+a_{n+1}+2a_n=0\,(n\ge 1)$。(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项；(2) 求证：对任意正整数 n，$2^{n+2}-7a_n^2$ 是完全平方数。

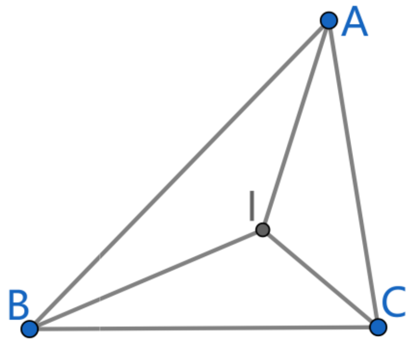
例 3. 正实数数列 $\{a_n\}_{n\ge 1}$ 满足：对任意正整数 n，都有 $\sum_{j=1}^{n}a_j^3=(\sum_{j=1}^{n}a_j)^2$。求证：对任意正整数 n，都有 $a_n=n$。

例 4. 定义卢卡斯数列 $\{L_n\}_{n\ge 0}$ 如下：$L_0=2, L_1=1$，且 $n\ge 2$ 时 $L_n=L_{n-1}+L_{n-2}$。(1) 求 $\{L_n\}$ 的通项；(2) 设正整数 $n\ge 5$，将 $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$ 写成十进制小数，求它小数点后的第一位数。

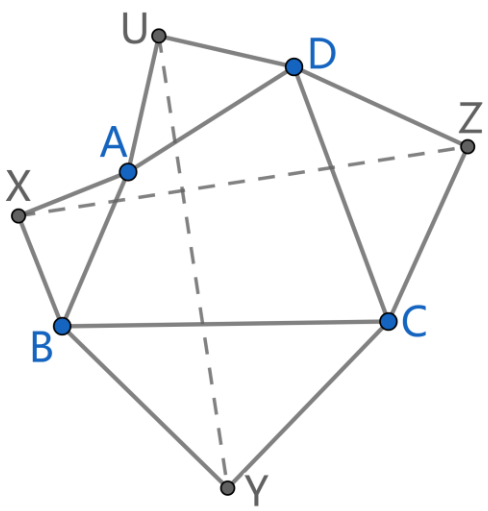
例 5. (1) 回忆定比分点公式，证明：若 P 为 $\triangle ABC$ 内一点，则 $[PBC]\cdot\overrightarrow{PA}+[PCA]\cdot\overrightarrow{PB}+[PAB]\cdot\overrightarrow{PC}=\vec{0}$；(2) 设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心，求证：

$\sin A\cdot\overrightarrow{IA}+\sin B\cdot\overrightarrow{IB}+\sin C\cdot\overrightarrow{IC}=\vec{0}$。





例 6. 给定四边形 $ABCD$，分别以它的四条边为斜边向外作等腰直角三角形，得到点 X,Y,Z,U 。求证： XZ 与 YU 垂直且相等。



例 7. 已知 AD,BE,CF 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，点 M,N 在 BC 边上，满足 $FM/\!/AD/\!/EN$ 。求证： AD 平分 $\angle MAN$ 。