

代数选讲-1

例 1. (2008, 高联) 解不等式 $\log_2(x^{12} + 3x^{10} + 5x^8 + 3x^6 + 1) < 1 + \log_2(x^4 + 1)$ 。

例 2. 已知正实数 a, b, c 满足 $\sqrt{a^2 + b^2} + c = 1$, 求 $ab + 2ac$ 的最大值。

例 3. 非负实数 x, y, z 满足 $x + y + z = 2$, 求 $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz$ 的最大值。

例 4. 实数 x, y, z 满足 $x + y + z = xy + yz + zx$, 求 $\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2}$ 的最小值。

例 5. 设 m 为正整数, 实数 x_1, x_2, \dots, x_m 满足 $\sum_{i=1}^m x_i = m$, $\sum_{i=1}^m x_i^2 = 11m$, $\sum_{i=1}^m x_i^3 = m$,

$\sum_{i=1}^m x_i^4 = 131m$ 。求证: $7 \mid m$ 。

例 6. 设正整数 $n \geq m \geq 1$, 求证: $\sum_{k=m}^n \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3}\right) \geq m \left(\sum_{k=m}^n \frac{1}{k^2}\right)^2$ 。

例 7. 已知正实数 x, y 满足 $x + y^{2020} \geq 1$ 。求证: $x^{2020} + y \geq \frac{99}{100}$ 。

例 8. 正实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 4\sqrt[3]{abc}$ 。求证:

$$2(ab + bc + ca) + 4 \min\{a^2, b^2, c^2\} \geq a^2 + b^2 + c^2。$$

例 9. 正实数 x, y, z 满足 $x + y + z = 1$ 。求证: $\frac{xy}{\sqrt{xy + yz}} + \frac{yz}{\sqrt{yz + zx}} + \frac{zx}{\sqrt{zx + xy}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

例 10. (2011, 美国数学奥林匹克) 设正实数 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2 \leq 4$ 。

求证: $\frac{ab+1}{(a+b)^2} + \frac{bc+1}{(b+c)^2} + \frac{ca+1}{(c+a)^2} \geq 3$ 。