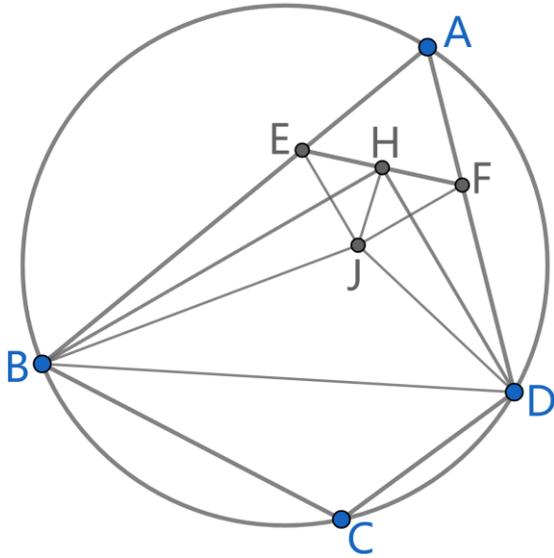


综合练习-2

综合练习-2

例 1. (杨博睿) 设  $ABCD$  为圆内接四边形, 在射线  $BA$  上取点  $E$  使得  $BE = BC$ , 在射线  $DA$  上取点  $F$  使得  $DF = DC$ 。设  $H$  为  $EF$  中点, 求证:  $BH \perp DH$ 。



例 2. 求证: 对任意的正整数  $n$ , 都有  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \frac{5}{3}$ 。注: 著名的巴塞尔问题说

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ , 约为 1.644934。用  $\frac{5}{3}$  对它做估计相差不到 0.022。

例 3. 设数列  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  满足  $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ , 且  $n \geq 1$  时,  $x_{n+3} = x_n + x_{n+1}x_{n+2}$ 。求证: (1)

对任意正整数  $m$ , 都存在正整数  $T$ , 使得对任意正整数  $n$  都有  $x_{n+T} \equiv x_n \pmod{m}$ 。

(2) 对任意正整数  $m$ , 都存在正整数  $k$  使得  $m \mid x_k$ 。

例 4. 设  $\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ , 复数列  $\{z_n\}_{n \geq 1}$  满足  $z_1 = z_2 = \alpha$ , 且  $n \geq 1$  时,

综合练习-2

$2z_{n+2} = 3\alpha z_{n+1} + (1-\alpha)z_n$ 。求证：对任意正整数  $n$ ，都有  $|z_n - \alpha^n| < 2$ 。

例 5. 已知  $z$  是复数，且关于  $x$  的方程  $4x^2 - 8zx + 4i + 3 = 0$  有实根。求  $|z|$  的最小值。

例 6. (2004, 重庆高考文) 设数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  满足  $a_1 = 1, a_2 = \frac{5}{3}$ ，且  $n \geq 1$  时

$a_{n+2} = \frac{5}{3}a_{n+1} - \frac{2}{3}a_n$ 。求  $\{a_n\}$  的通项公式。

例 7. (2004, 高联) 已知数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  满足  $a_0 = 3$ ， $n \geq 0$  时  $(3 - a_{n+1})(6 + a_n) = 18$ ，求

$\sum_{i=0}^n \frac{1}{a_i}$  的值。

例 8. 已知  $x_1 = 1, x_2 = 6$ ， $n \geq 2$  时  $x_{n+1} = 6x_n - 9x_{n-1} + 3^n$ 。求数列  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  的通项。

例 9. 在  $\triangle ABC$  中，已知  $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{3} \overline{CA} \cdot \overline{CB} + \frac{2}{3} \overline{AC} \cdot \overline{AB}$ ，求  $\cos B$  的最小值。