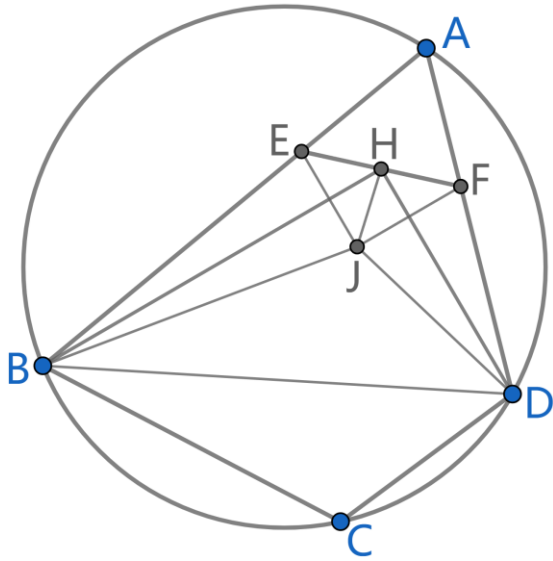


综合练习-2

综合练习-2

例 1. (杨博睿) 设 $ABCD$ 为圆内接四边形, 在射线 BA 上取点 E 使得 $BE = BC$, 在射线 DA 上取点 F 使得 $DF = DC$ 。设 H 为 EF 中点, 求证: $BH \perp DH$ 。



例 2. 求证: 对任意的正整数 n , 都有 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \frac{5}{3}$ 。注: 著名的巴塞尔问题说

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \text{ 约为 } 1.644934。 \text{ 用 } \frac{5}{3} \text{ 对它做估计相差不到 } 0.022。$$

例 3. 设数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 满足 $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, 且 $n \geq 1$ 时, $x_{n+3} = x_n + x_{n+1}x_{n+2}$ 。求证: (1)

对任意正整数 m , 都存在正整数 T , 使得对任意正整数 n 都有 $x_{n+T} \equiv x_n \pmod{m}$ 。

(2) 对任意正整数 m , 都存在正整数 k 使得 $m \mid x_k$ 。

例 4. 设 $\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$, 复数列 $\{z_n\}_{n \geq 1}$ 满足 $z_1 = z_2 = \alpha$, 且 $n \geq 1$ 时,

综合练习-2

$2z_{n+2} = 3\alpha z_{n+1} + (1-\alpha)z_n$ 。求证：对任意正整数 n ，都有 $|z_n - \alpha^n| < 2$ 。

例 5. 已知 z 是复数，且关于 x 的方程 $4x^2 - 8zx + 4i + 3 = 0$ 有实根。求 $|z|$ 的最小值。

例 6. (2004, 重庆高考文) 设数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = \frac{5}{3}$ ，且 $n \geq 1$ 时

$a_{n+2} = \frac{5}{3}a_{n+1} - \frac{2}{3}a_n$ 。求 $\{a_n\}$ 的通项公式。

例 7. (2004, 高联) 已知数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ 满足 $a_0 = 3$ ， $n \geq 0$ 时 $(3 - a_{n+1})(6 + a_n) = 18$ ，求

$\sum_{i=0}^n \frac{1}{a_i}$ 的值。

例 8. 已知 $x_1 = 1, x_2 = 6$ ， $n \geq 2$ 时 $x_{n+1} = 6x_n - 9x_{n-1} + 3^n$ 。求数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 的通项。

例 9. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{3} \overline{CA} \cdot \overline{CB} + \frac{2}{3} \overline{AC} \cdot \overline{AB}$ ，求 $\cos B$ 的最小值。