导数的定义与性质

一、知识要点

定义 1. 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，设 $\Delta x=x-x_0$，

$\Delta y=f(x)-f(x_0)$，如果 $x\to x_0$ 时 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限存在，那么称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，

并称这个极限为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$，即

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，也可记作 $y'\big|_{x=x_0}$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$.或 $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$。

定义 2. 如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 I 内的每一点处都可导，那么就称函数 $f(x)$ 在开区间 I 内可导。这时，对任一 $x_0\in I$，$f'(x_0)$ 都有确定的值，我们把由 $x_0\mapsto f'(x_0)$ 确定的函数叫做 $y=f(x)$ 的导函数，记作 $y', f'(x), \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$。

性质 1.（导数的几何意义）设函数 $y=f(x)$ 在开区间 I 内可导，它在 $x_0\in I$ 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率。根据导数的几何意义与直线的点斜式方程，可知曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为

$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$，其中 $y_0=f(x_0)$。

性质 2.（函数四则运算的求导法则）若函数 $u=u(x), v=v(x)$ 在 x 处都可导，那么它们的和、差、积、商（分母为零的除外）都在 x 处有导数，且满足：

（1）$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$；（2）$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

（3）$[\dfrac{u(x)}{v(x)}]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\ (v(x)\neq 0)$。上述法则可以简写为

$(u\pm v)'=u'\pm v', (uv)'=u'v+uv', (\dfrac{u}{v})'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$。

性质 3.（复合函数的求导法则）如果 $u=g(x)$ 在 x_0 处可导，$y=f(u)$ 在 $u_0=g(x_0)$ 处可导，那么复合函数 $y=f(g(x))$ 在 x_0 处可导，且其导数为

$[f(g(x))]'|_{x=x_0} = f'(u_0)\cdot g'(x_0) = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$，或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x=x_0} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}|_{u=u_0}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}|_{x=x_0}$。写成导函数的形式即 $[f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$，或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$。

性质 4.（反函数的求导法则）如果函数 $x = f(y)$ 在区间 I_y 内单调、可导，且 $f'(y)\neq 0$，那么它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 在区间 $I_x = \{x\,|\,x = f(y), y\in I_y\}$ 内也可导，且其导数为

$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)}$，或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$。

定义 3.（1）幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数，这五类函数称为基本初等函数。（2）由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次函数复合所构成，并可以用一个解析式表出的函数，称为初等函数。由上述法则和下述例题中基本初等函数的导数公式，我们可以求出任意初等函数的导数。

性质 5.（多项式函数的导数的代数推导）对于多项式函数，我们还可以用“重根”的概念定义它在一点处的切线。（1）设 $f(x) = x^n$，要求曲线 $y = f(x)$ 在点 $A(x_0, x_0^n)$ 处的切线。设它为 $l: y - x_0^n = k(x - x_0)$，与 $y = f(x)$ 联立，得 $x^n - x_0^n = k(x - x_0)$ 在 $x = x_0$ 处有重根。整理得 $(x - x_0)(\sum_{i=0}^{n-1} x^i x_0^{n-1-i} - k) = 0$ 在 $x = x_0$ 处有重根，于是 $k = nx_0^{n-1}$。这是一个纯粹代数的推导，没有使用任何与极限有关的概念。

（2）一般地，设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$，$a_i\in\mathbb{R}, 1\le i\le n$，要求曲线 $y = f(x)$ 在点 $A(x_0, f(x_0))$ 处的切线。设它为 $l: y - f(x_0) = k(x - x_0)$，与 $y = f(x)$ 联立，得 $f(x) - f(x_0) = a_n(x^n - x_0^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - x_0^{n-1}) + ... + a_1(x - x_0) = k(x - x_0)$ 在 $x = x_0$ 处有重根，于是 $k = na_n x_0^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x_0^{n-2} + ... + 2a_2 x_0 + a_1$。

（3）事实上，使用多项式的带余除法将 $f(x)$ 除以 $(x - x_0)^2$，设商和余项分别为 $g(x), h(x)$，即 $f(x) = (x - x_0)^2 g(x) + h(x)$，则 $h(x)$ 是 x 的一次函数。因为 $f(x) - h(x) = (x - x_0)^2 g(x)$ 在 x_0 处有重根，所以 $h(x)$ 是 $f(x)$ 在 x_0 处的切线方程。

二、例题精讲

例 1.（伯努利不等式）设实数$x>-1$，α是实数。我们有：（1）$\alpha>1$时，$(1+x)^{\alpha}\ge 1+\alpha x$；（2）$0<\alpha<1$时，$(1+x)^{\alpha}\le 1+\alpha x$；（3）$\alpha<0$时，$(1+x)^{\alpha}\ge 1+\alpha x$。以上三问中等号成立当且仅当$x=0$。

例 2. 设$a>0, a\ne 1$。（1）求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$；（2）求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$。提示：可以先考虑$a=\mathrm{e}$的情形。

例 3. 设$\alpha\in\mathbb{R}$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}$。

例 4.（幂函数的导数）设$f(x)=x^{\alpha}, \alpha\in\mathbb{R}$，则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^{\alpha}-x^{\alpha}}{h}=\alpha x^{\alpha-1}$，即$f'(x)=(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$。

例 5.（正弦和余弦的导数）（1）设$f(x)=\sin x$，则

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\dfrac{h}{2}\cos(x+\dfrac{h}{2})}{h}=\cos x$$

，于是$f'(x)=\cos x$，即$(\sin x)'=\cos x$。（2）设$g(x)=\cos x$，则$g'(x)=-\sin x$，即$(\cos x)'=-\sin x$。

例 6.（指数函数的导数）设$f(x)=\mathrm{e}^x$，则$f'(x)=\mathrm{e}^x$，即$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$。一般地，对任意$a>0$，我们有$(a^x)'=a^x\ln a$。

例 7.（对数函数的导数）设 $f(x)=\ln x$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}$，即 $(\ln x)'=\frac{1}{x}$。一般地，对任意 $a>0, a\neq 1$，我们有 $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$。

例 8.（反三角函数的导数）使用反函数的求导法则证明：$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$。至此，我们已经得到所有基本初等函数（幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数）的导数公式。

例 9.（双曲函数和反双曲函数的定义及导数公式）（1）双曲函数的定义如下：双曲正弦 $\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，双曲余弦 $\mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$，双曲正切 $\mathrm{th}x=\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$。

（2）反双曲函数的函数的定义如下：反双曲正弦 $\mathrm{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，反双曲余弦 $\mathrm{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，反双曲正切 $\mathrm{arth}x=\frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$。试验证它们确实满足如下关系：$x=\mathrm{sh}(\mathrm{arsh}x)$，$x=\mathrm{ch}(\mathrm{arch}x)$，$x=\mathrm{th}(\mathrm{arth}x)$。

（3）求证：$(\mathrm{sh}x)'=\mathrm{ch}x$，$(\mathrm{ch}x)'=\mathrm{sh}x$，$(\mathrm{th}x)'=\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$，$(\mathrm{arsh}x)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，$(\mathrm{arch}x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$，$(\mathrm{arth}x)'=\frac{1}{1-x^2}$。

三、拓展阅读：函数的连续性

定义 1.（函数在一点处连续）设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续。使用 $\epsilon-\delta$ 语言，上述命题即对任意 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$。若 $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处左连续。若 $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=f(x_0)$，则称函数

$f(x)$ 在 x_0 处右连续。

定义 2.（函数在区间上连续）在区间上每一点都连续的函数，称为该区间上的连续函数，或者说函数在该区间上连续。若区间包括端点，那么函数在右端点处连续是指左连续，在左端点处连续是指右连续。

A. 连续函数的局部性质

性质 1. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则以下结论成立：

（1）（局部有界性） $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 中有界。

（2）（局部保号性）若 $f(x_0)\neq 0$，则在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 中， $f(x)$ 与 $f(x_0)$ 同时为正或同时为负。

（3）（四则运算的连续性）设函数 $f(x), g(x)$ 在 x_0 处连续，则它们的和、差、积，即 $f\pm g,\ f\cdot g$ 都在 x_0 处连续。若 $g(x_0)\neq 0$，则它们的商 $\dfrac{f}{g}$ 在 x_0 处连续。

（4）（复合函数的连续性）设函数 $y=f(g(x))$ 由函数 $u=g(x)$ 和 $y=f(u)$ 复合而成，若函数 $u=g(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续， $g(x_0)=u_0$，且函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to x_0} g(x))=f(g(x_0))$，即复合函数 $y=f(g(x))$ 在 $x=x_0$ 处连续。

推论 1. 基本初等函数在它们的定义域内都是连续的。因为连续函数的四则运算和复合都连续，所以一切初等函数在其定义区间内都是连续的。

B. 连续函数的整体性质

定理 1.（魏尔斯特拉斯最值定理）闭区间上的连续函数在该区间上有界，且一定能取到它的最大值和最小值。

证：设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数。（1）对任意 $x_0\in[a,b]$，由连续函数的局部有界性，存在 x_0 的邻域 $U(x_0)$，使得 $f(x)$ 在 $[a,b]\cap U(x_0)$ 上有界。对一切 $x\in[a,b]$，$\{U(x), x\in[a,b]\}$ 组成闭区间 $[a,b]$ 的开覆盖。由有限覆盖引理，从这个开覆盖中可以选取有限个开区间 $\{U(x_k), 1\le k\le n\}$，使它们覆盖闭区间 $[a,b]$。因为 $f(x)$ 在 $[a,b]\cap U(x_k)$ 上有界，设 $x\in[a,b]\cap U(x_k)$ 时 $m_k\le f(x)\le M_k$，

$m=\min\{m_k, 1\le k\le n\}$， $M=\max\{M_k, 1\le k\le n\}$。于是对任意 $x\in[a,b]$，有

$m\le f(x)\le M$， $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

（2）设$M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$是$f(x)$在$[a,b]$上的上确界。假设在任何$x\in[a,b]$处都有$f(x)<M$，则$[a,b]$上的连续函数$M-f(x)$在$[a,b]$上处处大于零，且由$M$的定义它可以取任意接近$0$的值，于是$\dfrac{1}{M-f(x)}$可以任意地大。但$\dfrac{1}{M-f(x)}$是$[a,b]$上的连续函数，由（1）中结论它在$[a,b]$上是有界的，矛盾！所以存在$x_M\in[a,b]$使得$f(x_M)=M$，同理，存在$x_m\in[a,b]$使得$f(x_m)=m$。

定理 2.（零点定理）若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且在其两端点处取异号的值（即$f(a)\cdot f(b)<0$），则在开区间(a,b)内必有一点ξ，使得$f(\xi)=0$。

证：不妨设$f(a)<0,\ f(b)>0$。设S为所有满足$f(x)<0$的$x\in[a,b]$所构成的集合。由$a\in S$可知S非空。因为b是S的一个上界，所以可以设$c=\sup S$为S的上确界，$c\in[a,b]$，我们宣称$f(c)=0$。因为$f(a)<0$且$f(x)$在a处连续，所以存在$\lambda>0$使得对任意$x\in[a,a+\lambda)$，都有$f(x)<0, x\in S$，于是$c\ge a+\lambda$，同理存在$\mu>0$使得$c\le b-\mu$。若$f(c)>0$，因为$f(x)$在c处连续，所以存在$\gamma>0$使得对任意$x\in(c-\gamma,c+\gamma)$，都有$f(x)>0, x\notin S$，于是$c=\sup S\le c-\gamma$，矛盾！同理，若$f(c)<0$，则存在$\delta>0$使得对任意$x\in(c-\delta,c+\delta)$，都有$f(x)<0, x\in S$，于是$c=\sup S\ge c+\delta$，矛盾！所以$f(c)=0, a<c<b$。

定理 3.（介值定理）若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且在其两端点处取不同的函数值$f(a)=A,\ f(b)=B$，则对A,B之间的任何一个数C，在开区间(a,b)内必有一点ξ，使得$f(\xi)=C$。

证：设$g(x)=f(x)-C$，则$g(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$g(a)$与$g(b)$异号。由零点定理，存在$\xi\in(a,b)$，使得$g(\xi)=0$，于是$f(\xi)=C, a<\xi<b$。

推论 2. 由魏尔斯特拉斯最值定理和介值定理知，在闭区间$[a,b]$上连续的函数$f(x)$的值域为闭区间$[m,M]$，其中m,M分别为$f(x)$在$[a,b]$上的最小值与最大值。