综合练习-3

例 1.（1）求 $(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^3$ 的值；

（2）化简 $(\mathrm{i}+1)^{1000}+(\mathrm{i}-1)^{1000}$；

（3）复数 z 满足 $(z-3)(2-\mathrm{i})=5$，求 z 的值；

（4）复数 $z=\dfrac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ 的共轭复数在复平面的第几象限？

（5）求 $\mathrm{i}^{2001}+(\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i})^8+(\dfrac{\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}})^{10}+\dfrac{(2-4\mathrm{i})^2+(2\mathrm{i}+4)^2}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}$ 的值。

例 2.（1）设 a,b,c,d 为复数，若集合 $S=\{a,b,c,d\}$ 具有性质“对任意 $x,y\in S$ 必有 $xy\in S$

“，则当 $a=1,b^2=1,c^2=b$ 时，求 $b+c+d$ 的值。

（2）设复数 $z=x+(x^2-1)\mathrm{i}\ (x\in\mathbb{R})$，求 $|z|$ 的最小值。

（3）已知复数 z 满足 $\dfrac{z}{z-2}$ 是纯虚数，求 $|z+2|$ 的取值范围。

例 3.（1）设复数 z 满足 $|z|<1$ 且 $|\overline{z}+\dfrac{1}{z}|=\dfrac{5}{2}$，求 $|z|$ 的值。

（2）已知复数 $z_1=1+\sqrt{3}\mathrm{i},\ z_2=-\sqrt{3}+\sqrt{3}\mathrm{i}$，求复数 z_1z_2 的幅角主值。

例 4.（1）已知向量 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 不共线，实数 x,y 满足向量等式

$3x\mathbf{a}+(10-y)\mathbf{b}=2x\mathbf{b}+(4y+7)\mathbf{a}$，求 x,y 的值。

（2）在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}-2\mathbf{b},\overrightarrow{CD}=3\mathbf{a}-4\mathbf{b}+2\mathbf{c}$，对角线 AC,BD 的中点分别

为 E,F，试用 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 表示向量 $\overrightarrow{EF}$ 。

例 5.（1）已知 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$，且 $|\mathbf{a}|=2,|\mathbf{b}|=5$，求 $(2\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}$ 的值。

（2）已知向量 $\mathbf{a}=(1,\sqrt{3}),\mathbf{b}=(-\sqrt{3},1)$，求向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 的夹角。

（3）给定非零向量 $\mathbf{a},\mathbf{b}$，求证：$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$ 的充要条件是 $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ 。

例 6.（1）设 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 是同一平面内的三个单位向量，且 $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ 。求 $(\mathbf{c}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{b})$ 的最大值。

（2）设平面向量 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 满足 $|\mathbf{a}+2\mathbf{b}|=3,|2\mathbf{a}+3\mathbf{b}|=4$，求 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 的最小值。

例 7.（1）设复数 z_1,z_2 满足 $|z_1|=2,|z_2|=3$，且它们所对应向量的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，求 $\left|\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right|$ 的值。

（2）若复数 x,y,z 的模长均为 1，求证：$|xy+yz+zx|=|x+y+z|$。

例 8. 在关于 x 的方程 $x^2+z_1x+z_2+m=0$ 中，z_1,z_2,m 都是复数，且 $z_1^2-4z_2=16+20\mathrm{i}$ 。设这个方程的两根 α,β 满足 $|\alpha-\beta|=2\sqrt{7}$，求 $|m|$ 的最大值。