综合小测-5

例 1. 求下列函数的导函数：（1） $f(x)=x^5+\dfrac{1}{x}$；（2） $f(x)=4^x-x-1$；

（3） $f(x)=\dfrac{1}{x^{3/2}+2}$；（4） $f(x)=x^3\ln x$；

（5） $f(x)=\tan x$；（6） $f(x)=x-\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$；

（7） $f(x)=\ln(\sin x)$；（8） $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

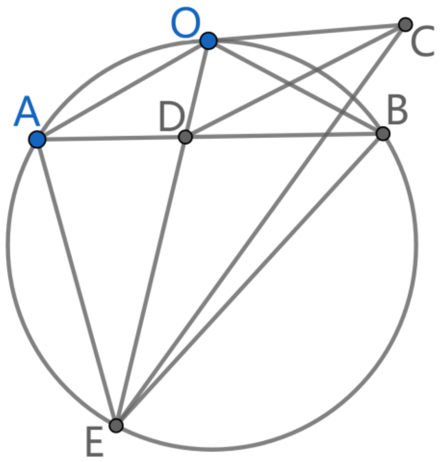
（9） $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$；（10） $f(x)=x^x$。

例 2.（1）非负实数 x,y,z 满足 $x+y+z=3$，求 $x^2+y^2+z^3$ 的最小值；（2）非负实数 a,b,c 满足 $a+b+c=1$，求 $a+\sqrt{b}+\sqrt[4]{c}$ 的最大值。

例 3.（1）设正整数 m,n 满足 $n^2<m<(n+1)^2$，试用无穷递降法证明 $\sqrt{m}$ 是无理数。（2）设 n 为正整数，$S_n=1+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{n}$。回忆 e 的定义中 $(1+\dfrac{1}{n})^n<\mathrm{e}<(1+\dfrac{1}{n})^{n+1}$，求证：$\ln(n+1)<S_n<1+\ln n$，这说明调和级数是发散的。

例 4. 设数列 $\{a_n\}_{n\ge1}$ 满足 $a_1>0$，$n\ge2$ 时 $a_n=a_{n-1}+\dfrac{1}{a_{n-1}}$。求证：（1）当 $n\ge2$ 时，$a_n\ge\sqrt{2n}$；（2）不存在实数 c，使得 $a_n<\sqrt{2n+c}$ 对所有的 n 都成立。

例 5.（2023，高联 B 卷）$\triangle ABC$ 的外心为 O，在 AB 上取一点 D，延长 OD 至点 E，使得 A,O,B,E 四点共圆。若 $OD=2, AD=3, BD=4, CD=5$，求证：$\triangle ABE$ 与 $\triangle CDE$ 的周长相等。



例 6. 设 O 为原点，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是单位圆内接正 n 边形的顶点，平面上一点 P 满足 $OP=d$。求证：(1) $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$；(2) $PA_1^2+PA_2^2+\ldots+PA_n^2=n+nd^2$。