复数与多项式

一、知识要点

定义 1. 设 R 是一个交换环（R 可取 $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$，m 是任意正整数），n 为非负整数。称表达式 $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0\ (a_i\in R, 0\le i\le n)$ 为 R 上的一个一元多项式，并将所有 R 上的一元多项式的集合记作 $R[x]$。上式中若 $a_n\neq 0$，则称 a_nx^n 为多项式 $p(x)$ 的首项，a_n 为首项系数，n 为 $p(x)$ 的次数，记作 $\deg p(x)=n$。注意零次多项式为 R 中的非零元素，零多项式的次数没有定义。我们可以从 R 上的加法、乘法除法出发，自然地定义 $R[x]$ 上的加法、乘法。

定义 2. 若 K 是 $\mathbb{C}$ 的子域（即 K 是 $\mathbb{C}$ 的子集，且对加减乘除封闭），则称 K 是一个数域。数域 K 可以取 $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$。

定义 3. 设 K 是数域，$K[x]$ 中的整除概念与整数环 $\mathbb{Z}$ 中很类似。

（1）设 $f(x),g(x)\in K[x], g(x)\neq 0$，若存在 $h(x)\in K[x]$ 使得 $f(x)=g(x)h(x)$，则称 $g(x)$（在 $K[x]$ 中）整除 $f(x)$，$g(x)$ 为 $f(x)$ 的一个因式，记作 $g(x)\mid f(x)$。若不存在上述 $h(x)$，就说 $g(x)$ 不整除 $f(x)$，记作 $g(x)\nmid f(x)$。

（2）设 $p(x)\in K[x]$ 且 $\deg p(x)\ge 1$。若 $p(x)$ 不能分解为 K 上两个正次数多项式的乘积，则称 $p(x)$ 是 $K[x]$ 中的既约多项式或不可约多项式，或 $p(x)$ 在 K 上不可约，否则称 $p(x)$ 在 K 上可约。

定理 1.（多项式的带余除法）设 K 是数域，$f(x),g(x)$ 是 K 上的一元多项式，且 $g(x)\neq 0$。则存在唯一的 $q(x),r(x)\in K[x]$，使得 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$，且 $\deg r(x)<\deg g(x)$，或者 $r(x)=0$。称 $q(x)$ 为商式，$r(x)$ 为余式。

推论 1. 设 K,L 是两个数域，$K\subset L$，$f(x),g(x)\in K[x]\subset L[x], g(x)\neq 0$，则 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 得到的商式和余式在 $K[x],L[x]$ 中是相同的。特别地，若 $g(x)$ 在 $L[x]$ 中整除

$f(x)$，则 $g(x)$ 在 $K[x]$ 中整除 $f(x)$。

定理 2.（1）（余式定理）设 K 是数域，$a\in K$，那么多项式 $f(x)\in K[x]$ 除以 $x-a$ 的余式为 $f(a)$。（2）（因式定理）设 K 是数域，那么多项式 $f(x)\in K[x]$ 有因式 $x-a$ 的充要条件是 $f(a)=0$。

推论 2. 由因式定理及归纳法得，设 $f(x)\in K[x]$，$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k\in K$ 是 $f(x)$ 的 k 个不同的零点，则 $f(x)$ 有因式 $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_k)$。

推论 3. 设 n 为正整数，$\epsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}, k=0,1,...,n-1$。由棣莫佛公式，$\epsilon_k^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}\cdot n}=1, k=0,1,...,n-1$。所以 $\{\epsilon_k, 0\le k\le n-1\}$ 是方程 $z^n-1=0$ 的 n 个不同的复根。于是由推论 2，在复数域上有因式分解 $z^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}(z-\epsilon_k)=\prod_{k=0}^{n-1}(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}})$。

定理 3.（代数基本定理）每个复系数一元 $n(n>0)$ 次多项式在 $\mathbb{C}$ 上一定有根。

推论 4.（1）在复数域上，只有一次多项式是既约的。

（2）设 n 为正整数，$\mathbb{C}[x]$ 中任意一个 n 次多项式 $f(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 上可以唯一地分解为 $f(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n)$，其中 a_n 是 $f(x)$ 的首项系数。

（3）复系数一元 $n(n>0)$ 次多项式（考虑重数）恰有 n 个复根。

（4）在实数域上，每个一元多项式可以分解成一次或二次因式之积；也就是说，实系数既约多项式只能为一次的或二次的。这是因为若 $f(x)\in\mathbb{R}[x]$，α 是 $f(x)$ 的虚根，则 $\bar{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 的虚根。设 $g(x)=(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})$，则 $g(x)=x^2-(\alpha+\bar{\alpha})x+\alpha\bar{\alpha}\in\mathbb{R}[x]$，且在 $\mathbb{C}[x]$ 中 $g(x)\mid f(x)$。由推论 1，在 $\mathbb{R}[x]$ 中也有 $g(x)\mid f(x)$。

（5）设 n 为正整数，$f(x)\in\mathbb{C}[x]$ 为 n 次多项式，它的互不相同的根为 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$，重数分别为 $m_1,m_2,...,m_k$，$m_1+m_2+...+m_k=n$。则 $f(x)$ 可以唯一地分解为

$f(x)=a_n(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\dots(x-\alpha_k)^{m_k}$ 。这称为复系数多项式的标准分解。

（6） $\mathbb{R}[x]$ 中所有不可约多项式为一次多项式 $ax+b\,(a,b\in\mathbb{R},\,a\neq 0)$ 或无实根的二次多项式 $ax^2+bx+c\,(a,b,c\in\mathbb{R},\,b^2-4ac<0,\,a\neq 0)$ 。

（7）设 n 为正整数， $f(x)\in\mathbb{R}[x]$ 为 n 次多项式，则它可以唯一地表示为

$f(x)=a_n(x-x_1)\dots(x-x_k)[(x-b_1)^2+c_1^2]\dots[(x-b_l)^2+c_l^2]$，其中 a_n 是 $f(x)$ 的首项系数， $x_i\in\mathbb{R},1\le i\le k$， $b_j,c_j\in\mathbb{R},c_j>0,1\le j\le l$， $k+2l=n$ 。

定理 4.（韦达定理）设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0\in\mathbb{C}[x]$，它所有带重数的复根为 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$，则 $f(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$ 。$1\le k\le n$ 时，设

$e_k=\sum\limits_{1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n}\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\dots\alpha_{i_k}$ （求和号中有 $\binom{n}{k}$ 项），则我们有 $e_k=(-1)^k\dfrac{a_{n-k}}{a_n}$ 。特别地，

$\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$， $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n=(-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}$ 。

二、例题精讲

例 1. 设 n 为正整数， $\epsilon_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2k\pi}{n}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}},k=0,1,\dots,n-1$ 。求证：（1）若 $n\mid m$，则 $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\epsilon_k^m=n$；（2）若 $n\nmid m$，则 $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\epsilon_k^m=0$ 。

例 2. 设 $x\in\mathbb{R},n\ge 1$，求证：（1） $\sin\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{2\pi}{n}\dots\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}=\dfrac{n}{2^{n-1}}$；

（2） $\sin(nx)=2^{n-1}\prod\limits_{k=0}^{n-1}\sin(x+\dfrac{k\pi}{n})$ 。

例 3. 已知复数a,b,c满足$a^2+ab+b^2=1$，$b^2+bc+c^2=-1$，$c^2+ca+a^2=\mathrm{i}$，求$ab+bc+ca$的值。

例 4. 已知复数a,b,c满足$a^2=b-c$，$b^2=c-a$，$c^2=a-b$，设$u=a+b+c$，$v=ab+bc+ca$，$w=abc$。(1) 求证：$v=\dfrac{u^2}{2}, w=\dfrac{u^3}{6}$；(2) 求$a+b+c$的值。

例 5. 求证：对任意正整数$n\geq 2$和任意实数x，都有$\sum\limits_{k=0}^{n-1}\cos(x+\dfrac{2k\pi}{n})=0$，$\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sin(x+\dfrac{2k\pi}{n})=0$。

例 6. 设$a,b,c,d\in\mathbb{R}$，使得对任何实数x都有$f(x)=1+a\sin x+b\cos x+c\sin 2x+d\cos 2x\geq 0$。求证：对任意$x\in\mathbb{R}$，都有$f(x)\leq 3$。

例 7. 给定素数$p\geq 5$，求证：$(x^2+x+1)^p$的p次项系数模p^2余1。

例 8. 设 $a_0>a_1>a_2>\ldots>a_n>0$， $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$。求证：

$f(x)=0$ 的一切复根都在单位圆的内部，即它们的模全部小于1。

三、拓展阅读

1. 柯西对巴塞尔问题的解答：（1）设 m 为正整数，由棣莫佛公式，

$$\cos(2m+1)x+\mathrm{i}\sin(2m+1)x=(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^{2m+1}=\sum_{k=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{k}\cos^{2m+1-k}x\cdot(\mathrm{i}\sin x)^k,$$

上式左右两边同时取虚部再除以 $\sin^{2m+1}x$，得

$$\frac{\sin(2m+1)x}{\sin^{2m+1}x}=\binom{2m+1}{1}\cot^{2m}x-\binom{2m+1}{3}\cot^{2m-2}x+\binom{2m+1}{5}\cot^{2m-4}x-\ldots$$

$+(-1)^{m-1}\binom{2m+1}{2m-1}\cot^2 x+(-1)^m$。$x=\dfrac{k\pi}{2m+1},1\le k\le m$ 时上式左边为 0，将上式右边看作关于 $\lambda=\cot^2 x$ 的一元 m 次函数 $f(\lambda)$，则它有 m 个不同的根

$\lambda_k=\cot^2\dfrac{k\pi}{2m+1},1\le k\le m$。比较 $f(\lambda)$ 的前两项系数，由韦达定理，我们有

$$\sum_{k=1}^{m}\cot^2\frac{k\pi}{2m+1}=\binom{2m+1}{3}\Big/\binom{2m+1}{1}=\frac{2m(2m-1)}{6}，于是$$

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2m+1}}=\sum_{k=1}^{m}\cot^2\frac{k\pi}{2m+1}+m=\frac{2m(2m+2)}{6}。$$

（2）因为 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时，$\sin x<x<\tan x$，$\dfrac{1}{\sin^2 x}>\dfrac{1}{x^2}>\dfrac{1}{\tan^2 x}$，于是

$$\frac{2m(2m+2)}{6}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2m+1}}>\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(\frac{k\pi}{2m+1})^2}>\sum_{k=1}^{m}\cot^2\frac{k\pi}{2m+1}=\frac{2m(2m-1)}{6},$$

$\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{2m(2m+2)}{(2m+1)^2}>\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}>\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{2m(2m-1)}{(2m+1)^2}$。上式左右两边取 $m\to\infty$ 的极限，则左右两边都趋于 $\frac{\pi^2}{6}$，由夹逼准则知 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$。

2. 对因式分解 $z^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}})$ 的另证：设 n 为正整数，$\epsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}},k=0,1,\ldots,n-1$。对非负整数 m，设 $a_m=\sum_{k=0}^{n-1}\epsilon_k^m$，则由例 1，$n\mid m$ 时 $a_m=n$，$n\nmid m$ 时 $a_m=0$。设 $\prod_{k=0}^{n-1}(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}})=\prod_{k=0}^{n-1}(z-\epsilon_k)=z^n-\sum_{j=0}^{n-1}b_jz^j$，则对任意 $k=0,1,\ldots,n-1$，都有 $\epsilon_k^n=\sum_{j=0}^{n-1}b_j\epsilon_k^j$，于是 $\{a_m\}_{m\geq 0}$ 是一个常系数 n 阶齐次线性递推数列，递推式为 $a_{m+n}=\sum_{j=0}^{n-1}b_ja_{m+j}$。在上式中分别令 $m=0,1,\ldots,n-1$，得：$m=0$ 时，$n=a_n=b_0a_0=b_0n,b_0=1$；$1\leq m\leq n-1$ 时，$0=a_{m+n}=b_{n-m}a_n=b_{n-m}n,b_{n-m}=0$。所以 $\prod_{k=0}^{n-1}(z-\epsilon_k)=z^n-\sum_{j=0}^{n-1}b_jz^j=z^n-1$。