不定积分和定积分

一、知识要点

定义 1. 如果在区间 I 上，可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$，即对任一 $x\in I$，都有 $F'(x)=\dfrac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}=f(x)$，那么就称函数 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数。

定理 1.（原函数存在定理）如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，那么在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$，使得对任一 $x\in I$，都有 $F'(x)=f(x)$。也就是说，连续函数一定有原函数。

注：（1）如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数，那么对任一常数 C，都有 $[F(x)+C]'=f(x)$，即函数 $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的原函数。另一边，设 $F(x), G(x)$ 都是 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数，则对任一 $x\in I$，都有 $F'(x)=G'(x)=f(x)$，于是 $[G(x)-F(x)]'=f(x)-f(x)=0$，$G(x)-F(x)=C$，C 为常数。

（2）初等函数的导函数都是初等函数，但是初等函数的原函数不一定是初等函数。例如 $\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x, \int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 都不是初等函数。但我们可以求出 $\frac{\sin x}{x}$（sinc 函数）和 e^{-x^2}（正态分布中的高斯函数）在某些特定区间上的定积分，如 $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}, \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$。

定义 2. 在区间 I 上，函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分，记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$。其中 $\int$ 称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，x 称为积分变量。由此定义可知，如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，那么 $F(x)+C$ 就是 $f(x)$ 的不定积分，即 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$。

定理 2.（基本积分表）（1）k 是常数，$\int k\mathrm{d}x=kx+C$；（2）常数 $\alpha\neq -1$ 时，$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$；（3）$\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C$（$x>0$ 时原函数为 $\ln x+C$，$x<0$ 时原函数为 $\ln(-x)+C$）；（4）$\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$；（5）$\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$；（6）

$\int e^x dx = e^x + C$；（7）$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$；（8）$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$；（9）

$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$；（10）$\int \ln x dx = x\ln x - x + C$；（11）

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$；（12）$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$。

性质 1.（1）设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的原函数存在，则

$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$。（2）设函数 $f(x)$ 的原函数存在，k 为非零常数，则 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$。

定义 3. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，在 $[a,b]$ 中任意插入若干个分点

$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$，它们把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间

$[x_0,x_1],[x_1,x_2],...,[x_{n-1},x_n]$，各个小区间的长度依次为

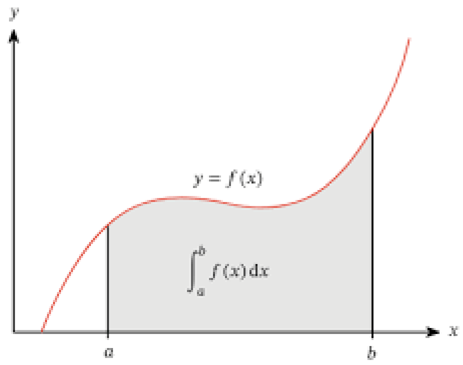
$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, ..., \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$。在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点

$\xi_i\ (x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$，作函数值 $f(\xi_i)$ 与小区间长度 Δx_i 的乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i\ (1 \le i \le n)$，并作出

和 $S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$。记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n\}$，如果当 $\lambda \to 0$ 时，这个和的极限总存在，且与闭区间 $[a,b]$ 划分成小区间的方式及 ξ_i 的取法无关，就称这个极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分（简称积分），记作 $\int_a^b f(x)dx$，即

$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$。其中 $f(x)$ 叫做被积函数，$f(x)dx$ 叫做被积表达式，

x 叫做积分变量，a 叫做积分下限，b 叫做积分上限，$[a,b]$ 叫做积分区间。



注：设 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上非负、连续，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 等于曲线 $y=f(x)$、x 轴、及两条直线 $x=a,\ x=b$ 所围成的曲边梯形的面积。这就是定积分的几何意义。

性质 2. 假定下列被积函数在积分区间上都是可积的。

（1）设 α,β 均为常数，则 $\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$。

（2）设 $a<c<b$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$。

（3）$\int_a^b 1\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x=b-a$。

（4）如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\ge 0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ge 0$。

（5）如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\le g(x)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$。

性质 3.（1）设 m,M 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最小值和最大值，则

$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le M(b-a)$。

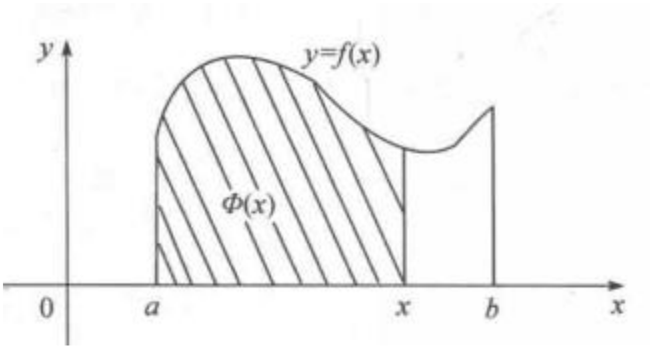
（2）（定积分中值定理）如果函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a,b]$ 上连续，那么存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$。

定理 3.（1）设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。

（2）设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，且只有有限个间断点（也就是说在有限个点之外 $f(x)$ 都连续），则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。

定理 4. 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，那么积分上限的函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上可导，并且它的导函数为 $\Phi'(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)$ 。于是变上限积分函数 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数。



定理 5.（微积分基本定理）如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，那么 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$ 。上式叫做牛顿-莱布尼茨公式，或微积分基本公式。

二、例题精讲

例 1.（1）设 n 为正整数。因为 $\dfrac{1}{n+1}=\int_n^{n+1}\dfrac{1}{n+1}\mathrm{d}x<\int_n^{n+1}\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x<\int_n^{n+1}\dfrac{1}{n}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{n}$ ，$\int_n^{n+1}\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln(n+1)-\ln n$ ，所以 $\dfrac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\dfrac{1}{n}$ 。

（2）设 k 为正整数。因为 $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\geq\dfrac{8}{(x+y)^2}$ ，令 $y=2k-x$ ，我们有

$$\frac{1}{k-\frac{1}{2}}-\frac{1}{k+\frac{1}{2}}=\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\frac{1}{(2k-x)^2}\mathrm{d}x=\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(2k-x)^2}\right)\mathrm{d}x>\frac{1}{k^2}\text{。}$$

例 2. 设 n 是正整数，则我们有：（1）$\frac{1}{\sqrt{n}} > \int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$，

$\frac{1}{\sqrt{n}} < \int_{n-1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$；

（2）$\sqrt{n} < \int_n^{n+1} \sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}[(n+1)^{3/2} - n^{3/2}]$，$\sqrt{n} > \int_{n-1}^{n} \sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}[n^{3/2} - (n-1)^{3/2}]$；

（3）由前两问知，$2(\sqrt{n+1} - 1) < \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{j}} < 2\sqrt{n}$，$\frac{2}{3} n^{3/2} < \sum_{j=1}^{n} \sqrt{j} < \frac{2}{3}[(n+1)^{3/2} - 1]$。

例 3.（斜抛运动）考虑质点在竖直向下的地球引力作用下的运动轨迹。设 t 时刻质点位置为 $(x(t), y(t))$，给定质点在 $t=0$ 时刻的初始位置 $(x(0), y(0))$ 和初始速度 $(x'(0), y'(0))$，它在地球引力的作用下满足 $x''(t) = 0, y''(t) = -g$。所以

$x'(t) = x'(0) + \int_0^t x''(u)\mathrm{d}u = x'(0)$，$y'(t) = y'(0) + \int_0^t y''(u)\mathrm{d}u = y'(0) - gt$，

$x(t) = x(0) + \int_0^t x'(u)\mathrm{d}u = x(0) + x'(0)t$，

$y(t) = y(0) + \int_0^t y'(u)\mathrm{d}u = y(0) + y'(0)t - \frac{1}{2} g t^2$。

例 4.（2009，高联）设 n 为正整数，求证：$-1<\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\ln n\leq\frac{1}{2}$。

例 5.（1996，中国数学奥林匹克）设 n 为正整数，$x_0=0$，$1\leq i\leq n$ 时 $x_i>0$，且 $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$。求证：$1\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+x_1+...+x_{i-1}}\cdot\sqrt{x_i+...+x_n}}<\frac{\pi}{2}$。

例 6. 设 n 为正整数，则$1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$，$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，$1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$。分别利用定义和上述公式计算定积分 $\int_0^1 x\mathrm{d}x, \int_0^1 x^2\mathrm{d}x, \int_0^1 x^3\mathrm{d}x$。

例 7. （莱布尼茨级数）因为 $\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x+C$，所以由牛顿-莱布尼茨公式，$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan 1-\arctan 0=\frac{\pi}{4}$。另一边，$0\leq x<1$ 时，

$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$，$\int_0^1 x^{2n}\mathrm{d}x=\frac{1}{2n+1}$，所以

$\frac{\pi}{4}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$。这里我们假定

$\int_0^1\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{2n}\mathrm{d}x$成立。

例 8.（交错调和级数）因为$\int\frac{1}{1+x}=\ln(1+x)+C$，所以由牛顿-莱布尼茨公式，

$\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2-\ln 1=\ln 2$。另一边，$0\le x<1$时，

$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$，$\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}$，所以

$\ln 2=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}$。这里我们假定

$\int_0^1\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 x^n\mathrm{d}x$成立。

例 9.（2022，全国卷 II 高考）已知函数$f(x)=x\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^x$，$a$为实数。

（1）当$a=1$时，讨论$f(x)$的单调性；（2）当$x>0$时，$f(x)<-1$，求a的取值范围；

（3）设n为正整数，求证：$\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}>\ln(n+1)$。

例 10.（2024，清华新领军一试）证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 nx^n\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$存在并求出它的值。

例 11.（2024，清华新领军 8 月零试）设实数a,b使$\int_0^{2\pi}(x^2-a\cos x-b\sin x)^2\mathrm{d}x$取到最小值，求$a,b$的值。