三角法入门

一、知识要点

前言：我在高中毕业前做平面几何题时还更倾向于使用纯几何法，但上大学以后投向了代数方法的怀抱。这些代数方法按我个人的使用频率从高到低排依次是：三角函数、向量、解析几何、复数。有了这些文艺复兴之后发展出的高级数学工具的帮助，我们做题时才能如虎添翼，摆脱古典时期的数学家研究欧氏几何时只能使用初等工具的桎梏。

值得说明的是，三角法在上述代数方法中特别受到青睐。这是因为它比解析法灵活，可以简化证明，少添辅助线，且仍能做到有章可循。相比向量法，它更擅长处理平面几何中的角度关系。三角法的本质是一个个地解三角形：局部来看每解一个三角形都是已知它的若干边和角，求别的边和角，最后我们整体地把从每个三角形处收集到的信息整理组合，得到要证的结论。局部与整体在高等数学，尤其是代数学、几何学和拓扑学中是非常重要的数学思想，但这些内容太深奥，本文中不再赘述。

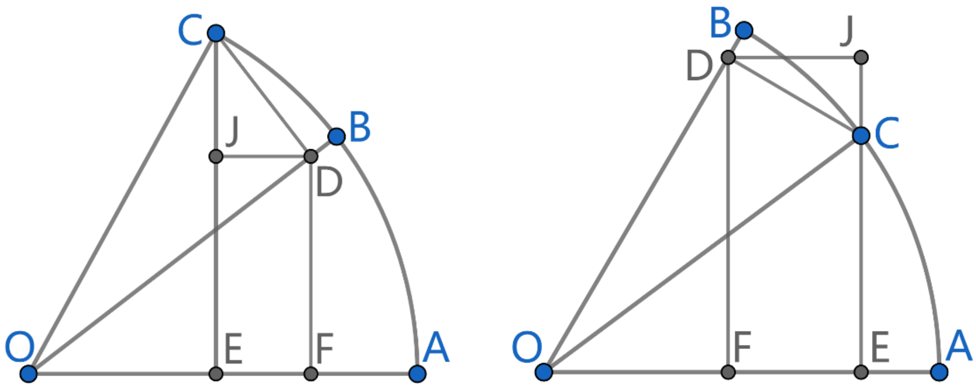
下面我们列举常用的三角公式：

（1）和差角公式：$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$，

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$，$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$，

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$，$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$，

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$。和差角公式是最重要的三角恒等式，下列三角恒等式都可由和差角公式推导得到。可以参照下面两张图分别从正弦和余弦函数的定义推导和角公式和差角公式，其中 $\angle AOB=\alpha,\angle BOC=\beta$。



（2）积化和差：$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$，

$2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$，$2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$。

（3）和差化积：$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$，

$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$，$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$，

$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$。

（4）二倍角公式：$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$，

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$，$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$，

$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$，$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$。

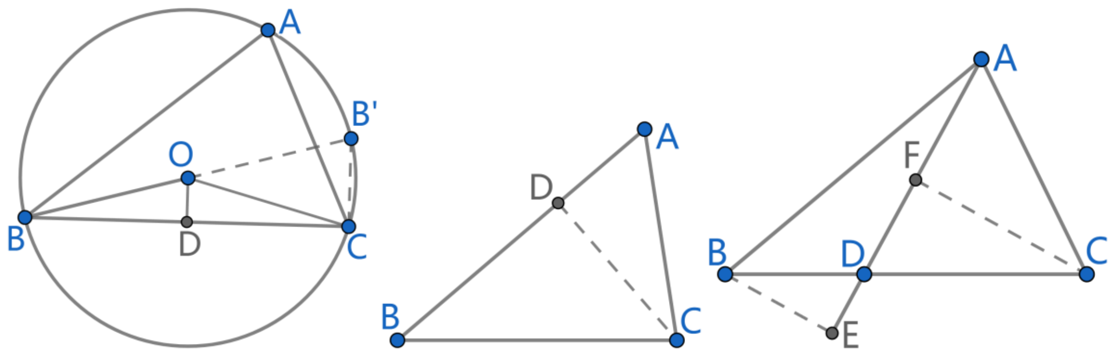
（5）万能公式：设 $t=\tan\frac{\alpha}{2}$，则 $\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$\tan\alpha=\frac{2t}{1-t^2}$。

（6）半角公式：$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$，$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$，

$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$。

定理 1.（正弦定理）在 $\triangle ABC$ 中，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$。它简洁且深刻，是我做平面几何题时最经常使用的定理，可用于已知三角形两角一边求另一边。

定理 2.（余弦定理）在 $\triangle ABC$ 中，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$。它适用于已知三角形边角边求另一边，或已知三角形三边求另一角。

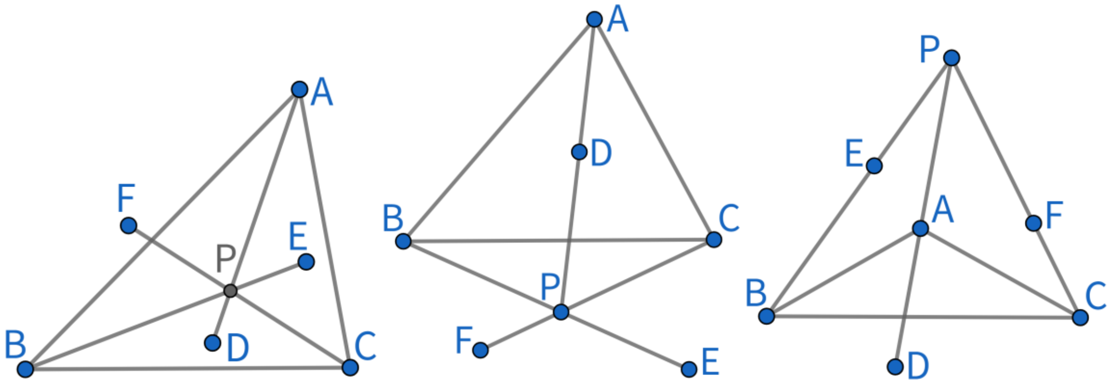


命题 1.（分角定理）在 $\triangle ABC$ 中，设 D 在直线 BC 上，则

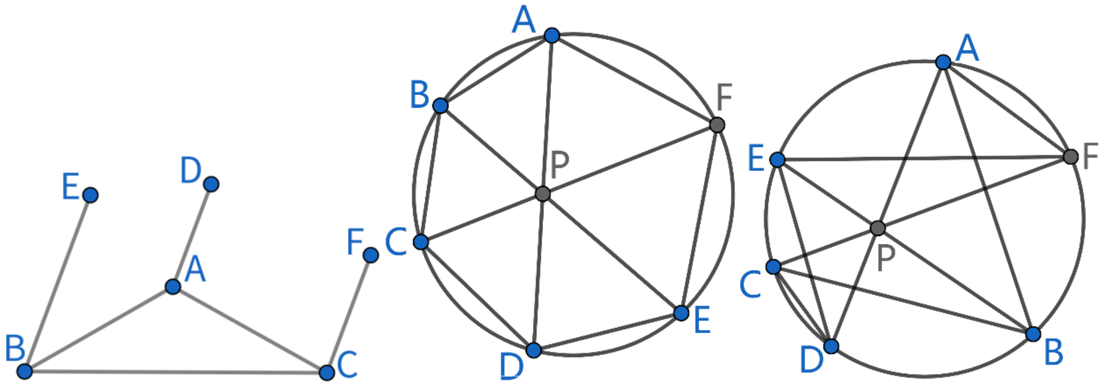
$\frac{BD}{DC}=\frac{[ABD]}{[ACD]}=\frac{d(D,AB)}{d(D,AC)}=\frac{AB\sin\angle BAD}{AC\sin\angle CAD}$，$\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}=\frac{BD\cdot AC}{CD\cdot AB}$。这两个公式适用于边与对应角的正弦比例的转化，也出现在点列交比与线束交比的转化中。

命题 2.（1）若$\alpha,\beta,\alpha',\beta'\in(0,\pi),\alpha+\beta=\alpha'+\beta'=\theta\neq\pi$，且$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{\sin\alpha'}{\sin\beta'}$，则$\alpha=\alpha',\beta=\beta'$；（2）若$\alpha,\beta,\alpha',\beta'\in(0,\pi),\alpha-\beta=\alpha'-\beta'=\theta\neq 0$，且$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{\sin\alpha'}{\sin\beta'}$，则$\alpha=\alpha',\beta=\beta'$。

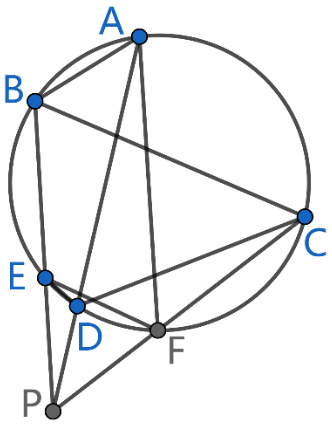
命题 3. 在$\triangle ABC$中，$\tan B=\dfrac{AC\sin A}{AB-AC\cos A}$。它适用于已知三角形边角边求另一角，插图同余弦定理。

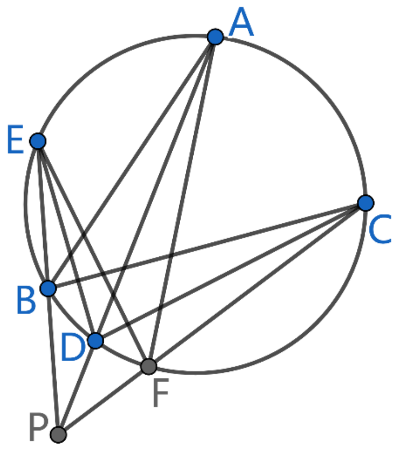


定理 3.（角元塞瓦定理）在$\triangle ABC$中，AD,BE,CF三线共点或平行当且仅当$\dfrac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}\cdot\dfrac{\sin\angle ACF}{\sin\angle BCF}\cdot\dfrac{\sin\angle CBE}{\sin\angle ABE}=1$。



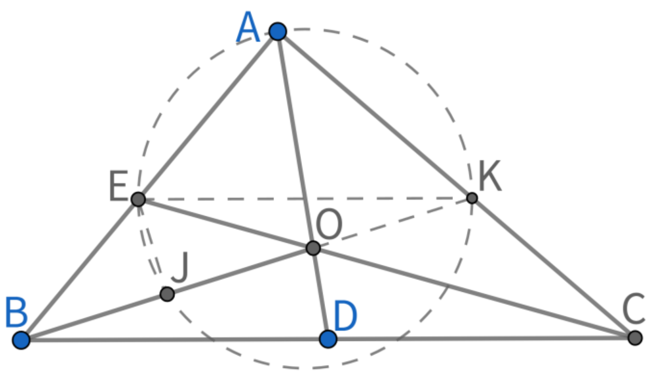
推论 1.（三弦共点定理）设$ABCDEF$为圆内接六边形（可以有边自交），则AD,BE,CF三线共点或平行当且仅当$\dfrac{AB}{BC}\cdot\dfrac{CD}{DE}\cdot\dfrac{EF}{FA}=1$。



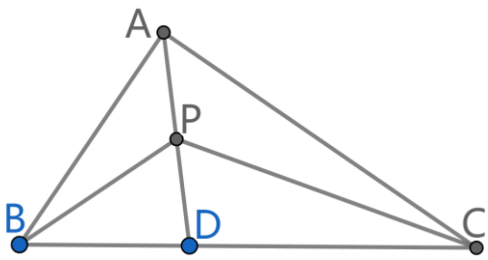


二、例题精讲

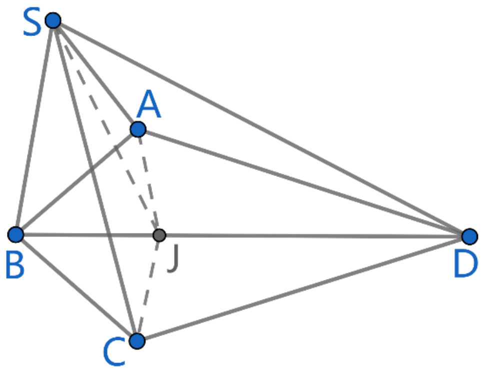
例 1. $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$，点 D 是 BC 的中点，点 E 在线段 AB 上，CE 交 AD 于点 O。已知 $BE=OE$，求证：$BO=\sqrt{2}AO$。



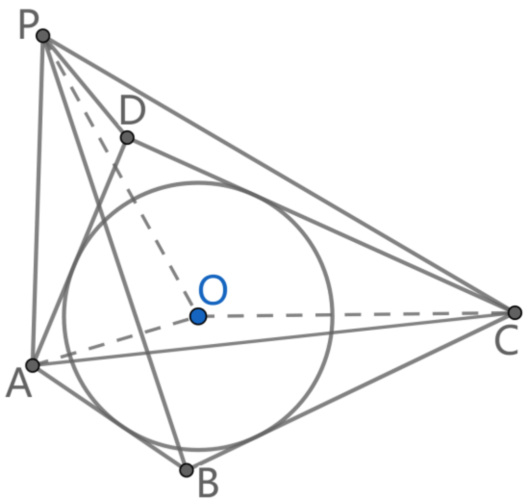
例 2. 在$\triangle ABC$中，$AB\perp AC$，点 D 在 BC 上，且非 BC 中点，$\frac{2}{AD}=\frac{1}{BD}+\frac{1}{CD}$。求证：(1) $\angle BDA=2\angle BAD$；(2) 若点 P 为 AD 中点，则 PD 平分 $\angle BPC$。



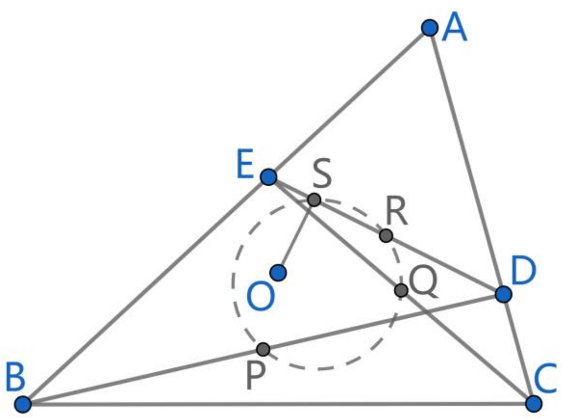
例 3. 点 A 在凸四边形 $SBCD$ 的内部，$AB=BC$，$AD=CD$，$\angle ASD=\angle BSC$。求证：$\dfrac{BS}{DS}=\dfrac{AB}{AD}$。



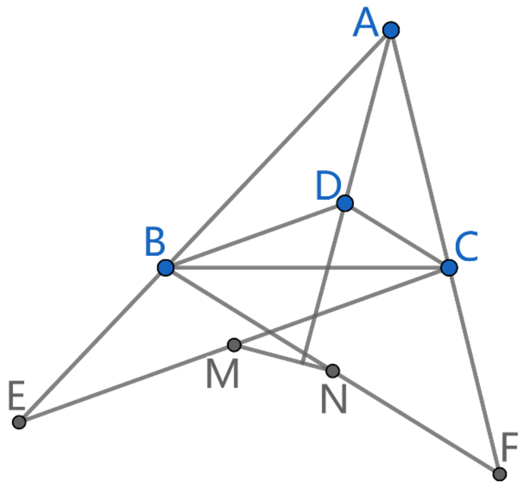
例 4.（圆外切四边形等角线定理）$\odot O$ 内切于凸四边形 $ABCD$，点 P 在四边形 $ABCD$ 外，点 B,D 均在 $\angle APC$ 的内部，$\angle APB=\angle CPD$。求证：$\angle APO=\angle CPO$。



例 5. 点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，在线段 AC,AB 上分别各取一点 D,E，点 P,Q,R 分别是线段 BD,CE,DE 的中点。点 S 在 DE 上，$OS\perp DE$。求证：P,Q,R,S 四点共圆。

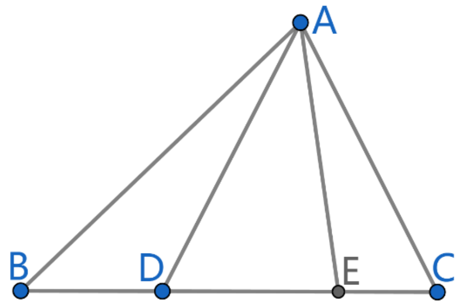


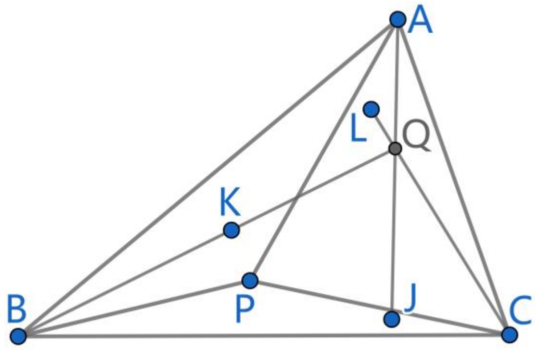
例 6. $\triangle ABC$ 中，D 在 $\angle BAC$ 的平分线上，$BF /\!/ CD$ 交 AC 于 F，$CE /\!/ BD$ 交 AB 于 E。设 M,N 分别是 CE,BF 的中点，求证：$AD \perp MN$。



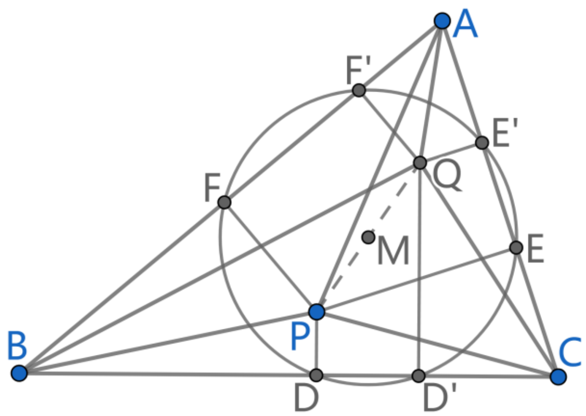
例 7.（等角线定理）点 D,E 均在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上。求证：$\angle BAD=\angle CAE$ 的充要条件是 $\dfrac{BD\cdot BE}{CD\cdot CE}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$。此时称 AD,AE 是关于 $\angle BAC$ 的等角线。

例 8.（等角共轭点）给定 $\triangle ABC$，对于平面上不在 $\triangle ABC$ 三边所在的直线上的任意一点 P，分别设 AP,BP,CP 关于 $\angle CAB,\angle ABC,\angle BCA$ 的等角线为 AJ,BK,CL。求证：直线 AJ,BK,CL 交于一点 Q。上述点 P 可以在 $\triangle ABC$ 的内部或外部，称 P,Q 是关于 $\triangle ABC$ 的一对等角共轭点。



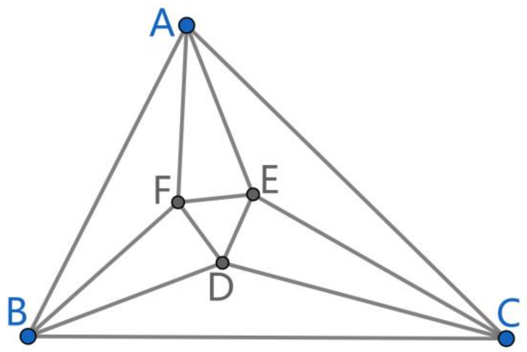


例 9. 设 P,Q 是关于 $\triangle ABC$ 的一对等角共轭点，P 到 BC,CA,AB 的投影分别是点 D,E,F，Q 到 BC,CA,AB 的投影分别是点 D',E',F'。求证：D,E,F,D',E',F' 六点共圆，该圆圆心为 PQ 中点 M。

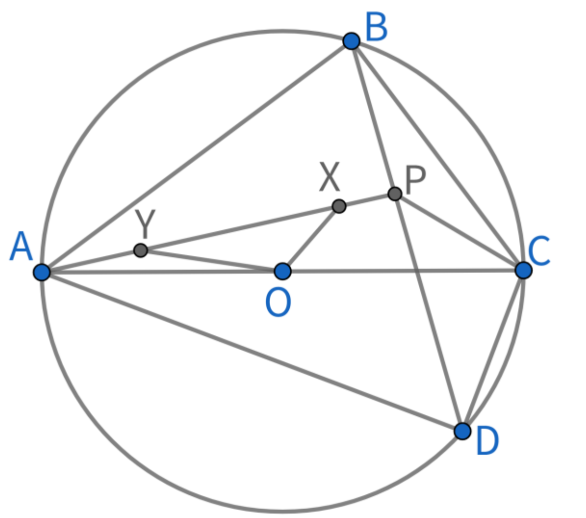


例 10.（1）设 $x\in\mathbb{R}$，求证：$\sin(3x)=4\sin x\sin(x+\frac{\pi}{3})\sin(x+\frac{2\pi}{3})$；

（2）（Morley 的角三分线定理）如图，在 $\triangle ABC$ 中，相邻两角的三等分线相交于 D,E,F 三点，则 $\triangle DEF$ 是正三角形。

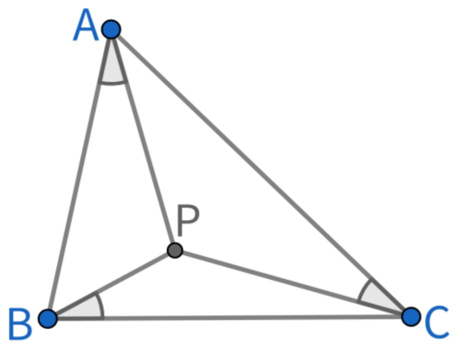


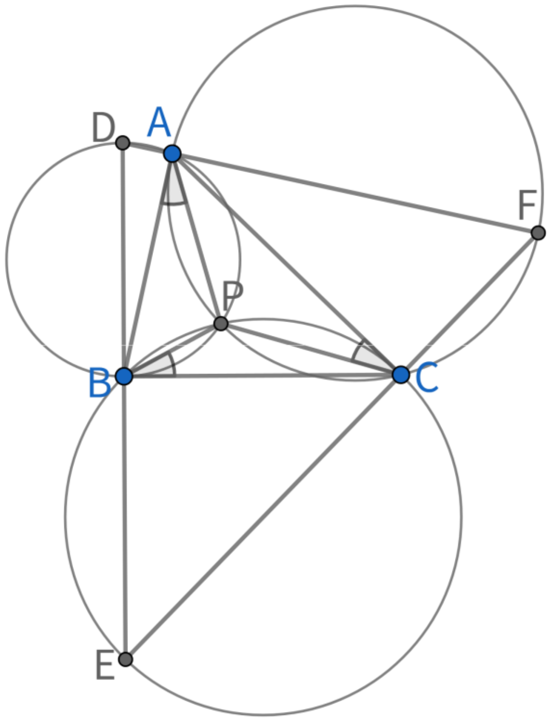
例 11.（2022，高联 A 卷）在凸四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=\angle ADC=\frac{\pi}{2}$，对角线 BD 上一点 P 满足 $\angle APB=2\angle CPD$，线段 AP 上两点 X,Y 满足 $\angle AXB=2\angle ADB$，$\angle AYD=2\angle ABD$。求证：$BD=2XY$。



例 12．(布洛卡点) 已知$\triangle ABC$中，P是内部一点，当$\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA$时，称点$P$为$\triangle ABC$的布洛卡点，角$\theta$为布洛卡角。(1) 满足上述条件的布洛卡点存在且唯一。

如图，分别过点B,C,A作BC,CA,AB的垂线，围成$\triangle DEF$，则点P是A,B,C关于$\triangle DEF$的密克点，即$\odot(ABD),\odot(BCE),\odot(CAF)$的交点。





(2) 若$\angle PAC=\theta$，则$a^2=bc$。

(3) 布洛卡角θ满足$\cot A+\cot B+\cot C=\cot\theta$。

(4) 布洛卡角$\theta\le\dfrac{\pi}{6}$，等号成立当且仅当$\triangle ABC$是等边三角形。