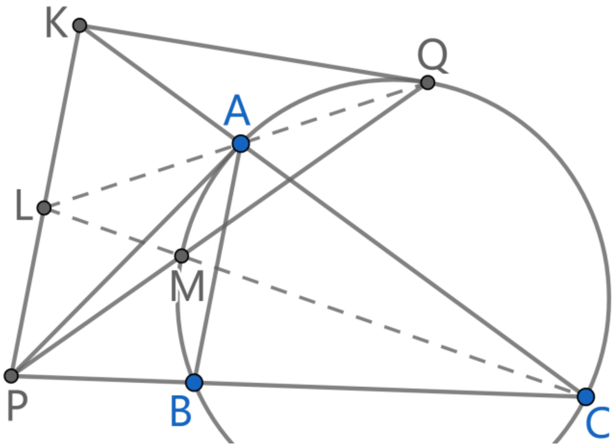
几何选讲-2

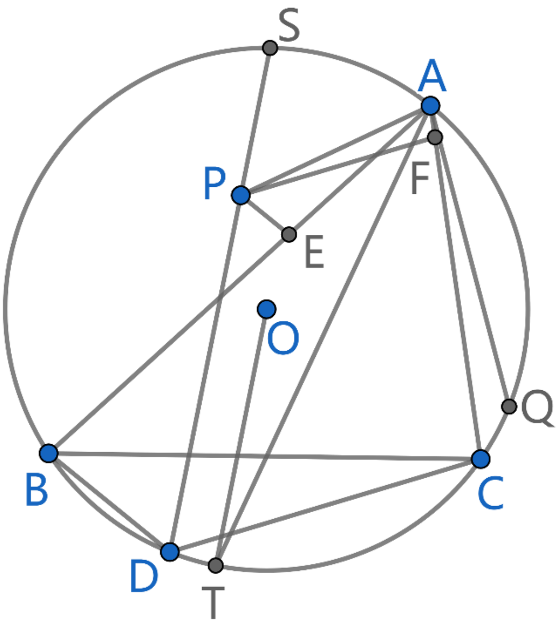
例 1. 圆ω是$\triangle ABC$的外接圆，M是弧AB的中点，过A作ω的切线交直线BC于P，直线PM交ω于Q（异于M），过Q作ω的切线交AC于K。求证：$AB /\!/ PK$。



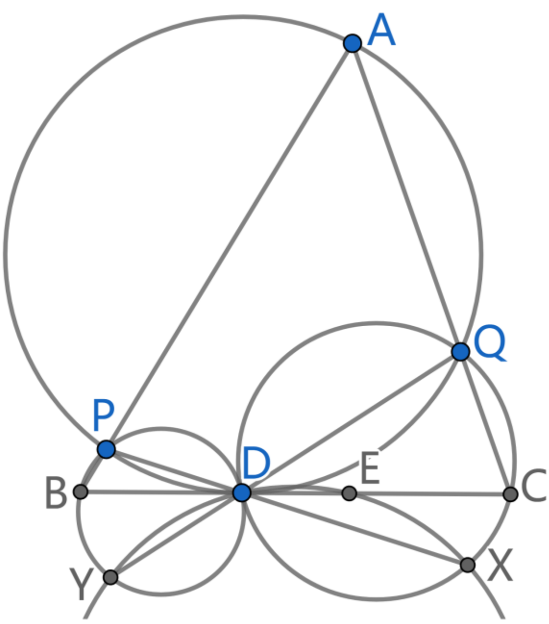
例 2.（加强的欧拉不等式）回忆：设$\triangle ABC$的外心、内心分别为O, I，则由欧拉定理，我们有$R^2-2Rr=OI^2\ge 0, R\ge 2r$。试证明下列不等式，它比上述欧拉不等式更强：

$$\frac{R}{r}\ge\frac{abc+a^3+b^3+c^3}{2abc}\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-1\ge\frac{2}{3}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge 2。$$

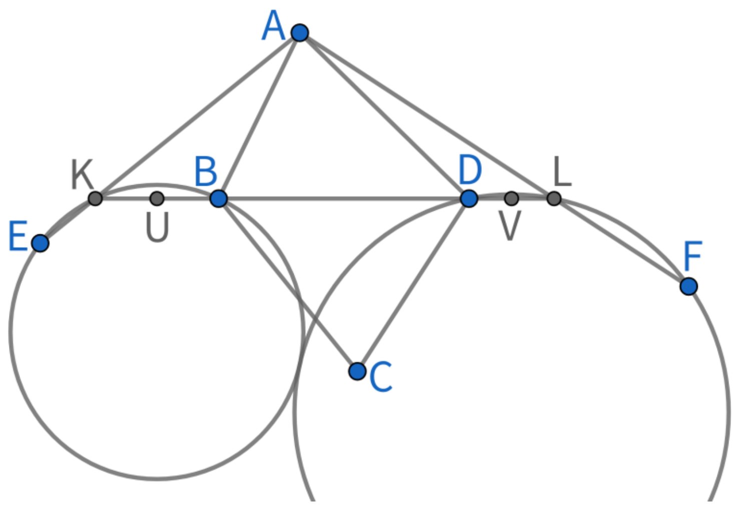
例 3. 设$\odot O$是$\triangle ABC$的外接圆，D是弧BC（不含A）上的一点，S是弧BAC的中点。P为线段SD上一点，过P作DB的平行线交AB于点E，过P作DC的平行线交AC于点F，过O作SD的平行线交弧$\overset{\frown}{BDC}$于点T。已知$\odot O$上的点Q满足$\angle QAP$被AT平分，求证：$QE=QF$。



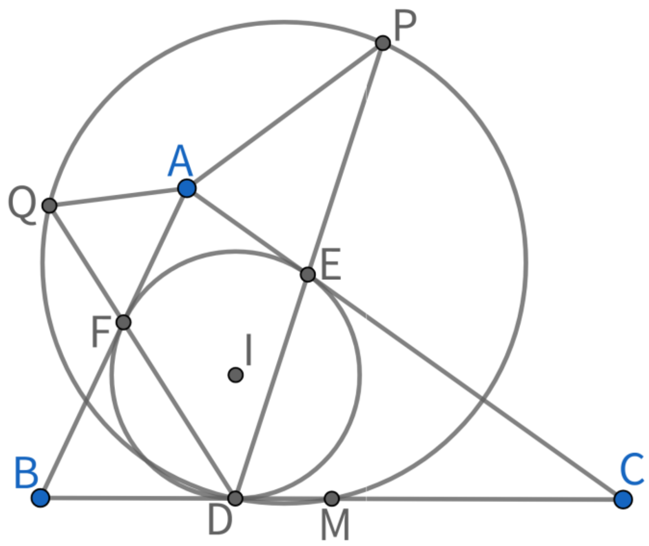
例 4. 设四边形$APDQ$内接于圆Γ，过D作Γ的切线与直线AP,AQ分别交于B,C两点。延长PD交$\triangle CDQ$的外接圆于点X，延长QD交$\triangle BDP$的外接圆于点Y。设$\triangle DXY$的外接圆交BC于点D,E，求证：$BD=CE$。



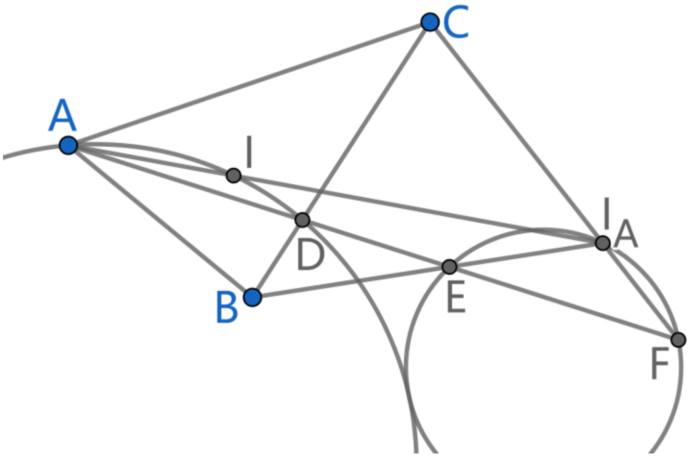
例 5.（2020，IMO 预选题）设凸四边形 $ABCD$ 满足 $\angle ABC>\dfrac{\pi}{2},\angle CDA>\dfrac{\pi}{2}$，$\angle DAB=\angle BCD$。记 E,F 分别为点 A 关于直线 BC,CD 的对称点。设线段 AE,AF 分别与直线 BD 交于点 K,L。求证：$\triangle BEK$ 和 $\triangle DFL$ 的外接圆相切。



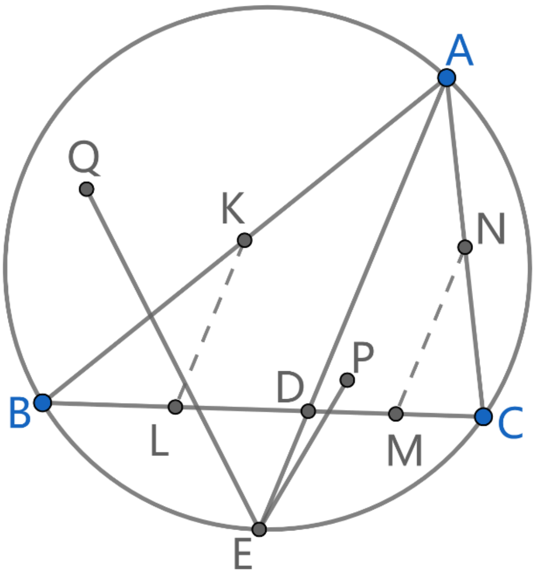
例 6. 不等边 $\triangle ABC$ 的内切圆与边 BC,CA,AB 分别相切于点 D,E,F。在 $\triangle ABC$ 外部构造 $\triangle APE,\triangle AQF$，使得 $AP=PE,AQ=QF,\angle APE=\angle ACB,\angle AQF=\angle ABC$。设 M 是边 BC 的中点，请用 $\triangle ABC$ 的三个内角来表示 $\angle QMP$。



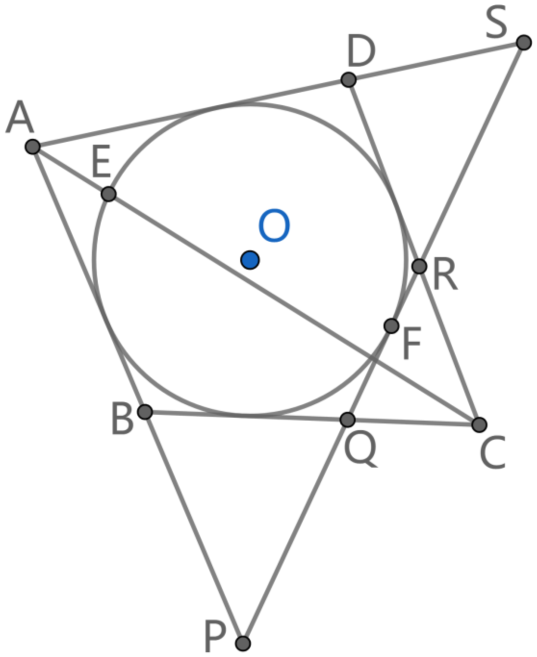
例 7.（2020，IMO 预选题）设锐角$\triangle ABC$的内心为I，点A所对的旁心为I_A。若$AB<AC$，设D为$\triangle ABC$内切圆与边BC的切点，直线AD直线BI_A,CI_A分别交于点E,F。求证：$\odot(AID)$与$\odot(I_AEF)$相切。



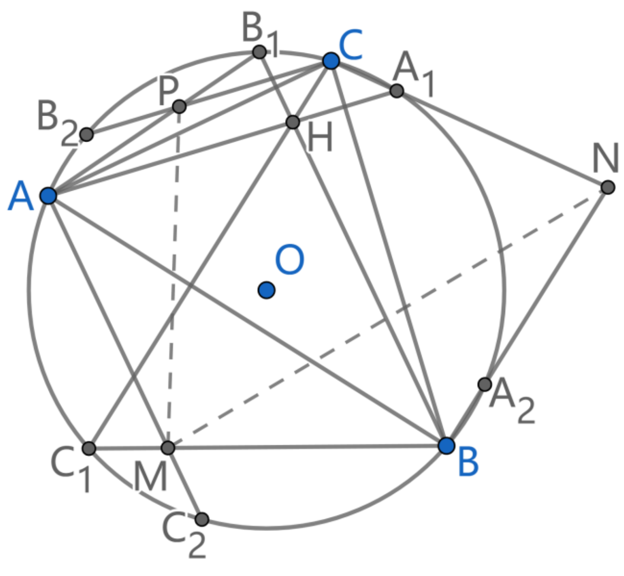
例 8. 在$\triangle ABC$中，$\angle A$的平分线交BC于点D，交$\triangle ABC$的外接圆于点E。设K,L,M,N分别为AB,BD,DC,CA的中点，P,Q分别是$\triangle EKL,\triangle EMN$的外心。求证：$\angle PEQ=A$。



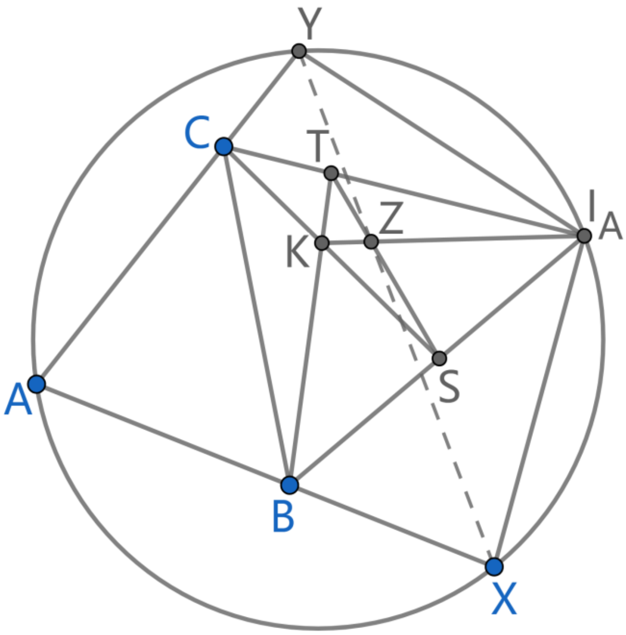
例 9. 四边形 $ABCD$ 外切于圆 ω，设 E 是 AC 与 ω 的交点中离 A 较近的那一个， F 是 E 在 ω 上的对径点。设 ω 过 F 的切线与直线 AB,BC,CD,DA 分别交于点 P,Q,R,S 。求证： $PQ=RS$ 。



例 10. 设 O,H 分别是锐角 $\triangle ABC$ 的外心和垂心， Γ 是其外接圆。延长 AH,BH,CH 分别交 Γ 于点 A_1,B_1,C_1，过 A_1,B_1,C_1 分别作 BC,CA,AB 的平行线与 Γ 再交于点 A_2,B_2,C_2 。设 M,N,P 分别是 AC_2 与 BC_1， BA_2 与 CA_1， CB_2 与 AB_1 的交点。求证：
$\angle MNB=\angle AMP$ 。



例 11. $\triangle ABC$ 中，I_A 是点 A 所对的旁心。一个经过 A,I_A 的圆与 AB,AC 的延长线分别交于点 X,Y 。线段 I_AB 上一点 S 满足 $\angle CSI_A=\angle AYI_A$，线段 I_AC 上一点 T 满足 $\angle BTI_A=\angle AXI_A$ 。设 K 是 BT,CS 的交点，Z 是 ST,I_AK 的交点。求证：X,Y,Z 三点共线。



例 12.（2015，欧洲女奥）设 H,G 分别是锐角 $\triangle ABC$ $(AB\neq AC)$ 的垂心和重心，直线 AG 与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于另一点 P 。设 P' 是点 P 关于直线 BC 的对称点。求证：$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$ 当且仅当 $HG=GP'$ 。