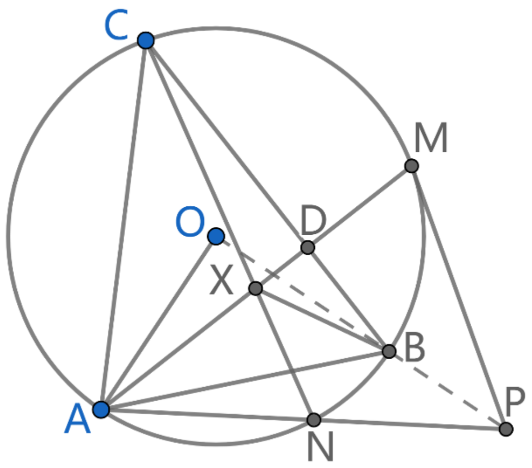
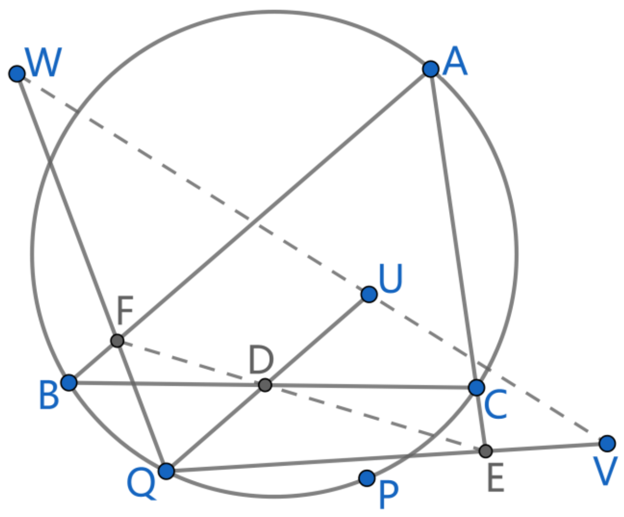
几何选讲-3

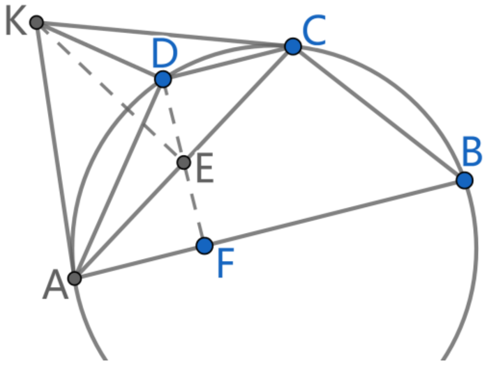
例 1.（2010，伊朗）已知锐角$\triangle ABC$内接于$\odot O$，$\angle C=\dfrac{\pi}{4}$，$AD$为高线，点$X$在线段$AD$内部，且满足$\angle XBC=\dfrac{\pi}{2}-\angle B$，$AD,CX$分别与$\odot O$交于点$M,N$，过$M$关于$\odot O$的切线与$AN$交于点$P$。求证：$P,B,O$三点共线。



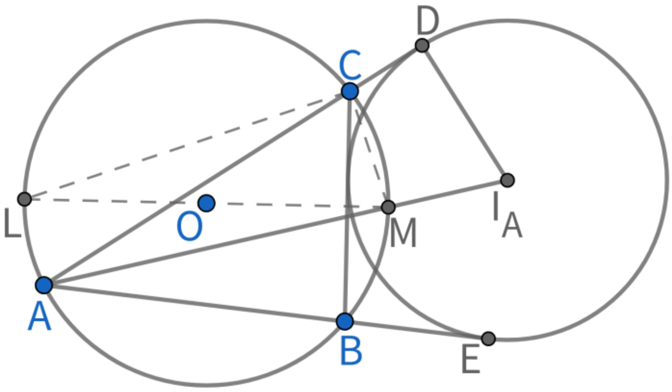

例 2.（清宫定理）设$P,Q$为$\triangle ABC$外接圆上异于$A,B,C$的两点，$P$点关于三边$BC,CA,AB$的对称点分别为$U,V,W$，$QU,QV,QW$分别与直线$BC,CA,AB$交于点$D,E,F$。求证：$D,E,F$三点共线。



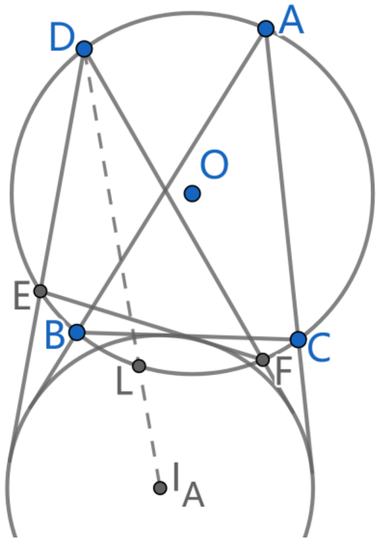
例 3. 等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB=3CD$，过 $A$ 和 $C$ 分别作其外接圆的切线，两者交于点 $K$。求证：$\triangle KDA$ 是直角三角形。



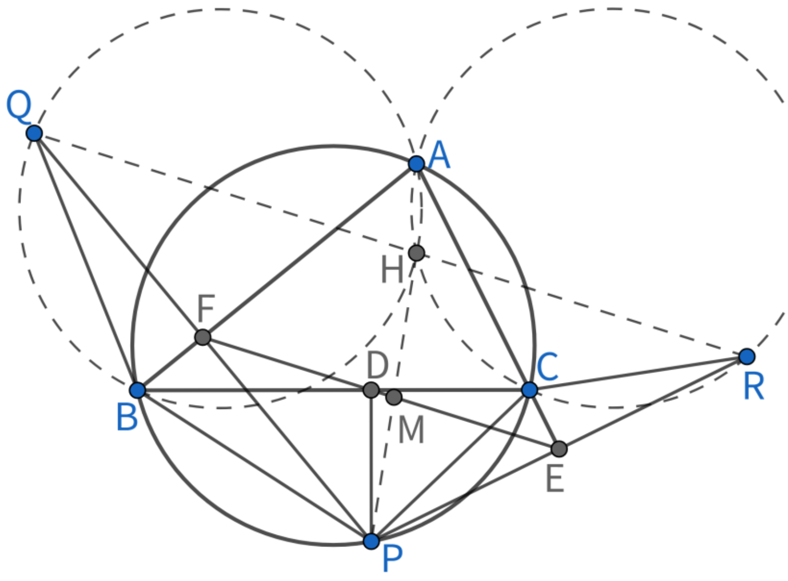

例 4.（旁切圆的欧拉定理）设 $\triangle ABC$ 的外心和点 $A$ 所对的旁心分别为 $O, I_A$，$\odot I_A$ 的半径为 $r_A$。求证：$OI_A^2=R^2+2Rr_A$。由此得出 $r_A=R$ 当且仅当 $OI_A=\sqrt{3}R$。



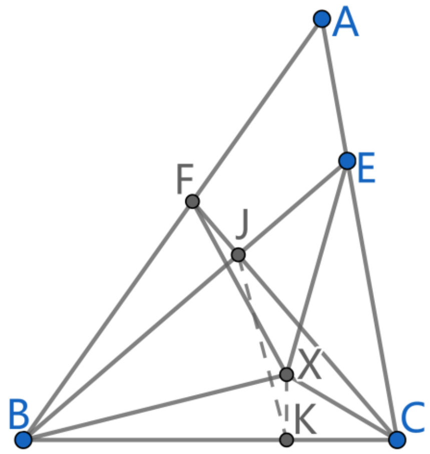

例 5.（关于三角形旁切圆的彭赛列闭合定理）设 $\triangle ABC$ 的外接圆和点 $A$ 所对的旁切圆分别为 $\odot O, \odot I_A$，$D, E, F$ 是 $\odot O$ 上的三个不同的点，满足 $DE, DF$ 的延长线都与 $\odot I_A$ 相切。求证：线段 $EF$ 也和 $\odot I_A$ 相切。



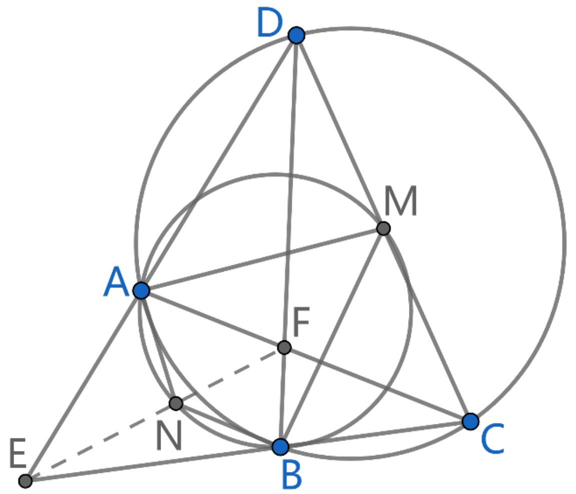
例 6. 设 $P$ 是 $\triangle ABC$ 外接圆上异于 $A,B,C$ 的任意一点，过 $P$ 作三边 $BC,CA,AB$ 的垂线，垂足分别为 $D,E,F$， $H$ 是 $\triangle ABC$ 的垂心。求证：西姆松线 $DEF$ 平分 $PH$ 。



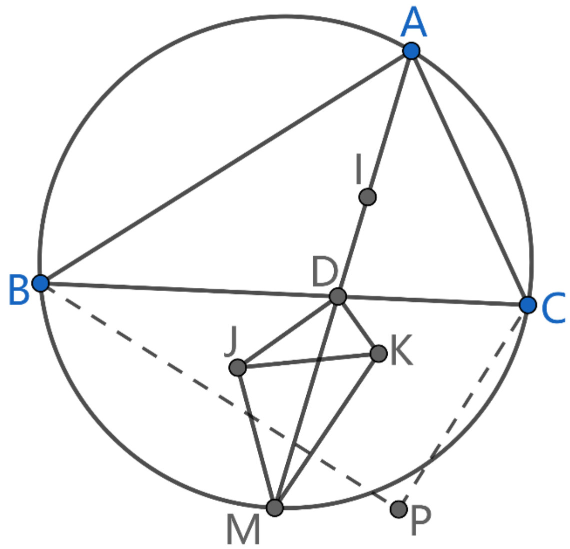

例 7. 在锐角 $\triangle ABC$ 的 $AB,AC$ 边上分别取点 $E,F$ 使得 $BE \perp CF$， 然后在 $\triangle ABC$ 的内部取点 $X$ 使得 $\angle XBC = \angle EBA, \angle XCB = \angle FCA$ 。求证： $\angle EXF = \frac{\pi}{2} - A$ 。



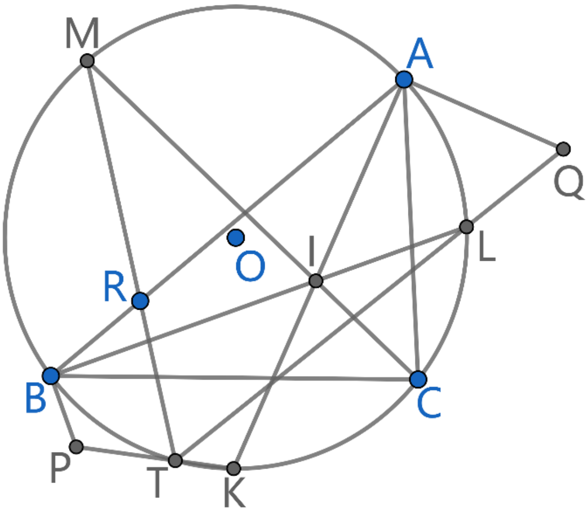
例 8. 已知凸四边形 $ABCD$ 内接于圆，$AD,BC$ 的延长线交于点 $E$，对角线 $AC$ 与 $BD$ 交于点 $F$， $M$ 为 $CD$ 的中点， $N$ 为 $\triangle ABM$ 的外接圆上不同于 $M$ 的点，且满足 $\dfrac{AN}{BN}=\dfrac{AM}{BM}$ 。求证： $E,F,N$ 三点共线。



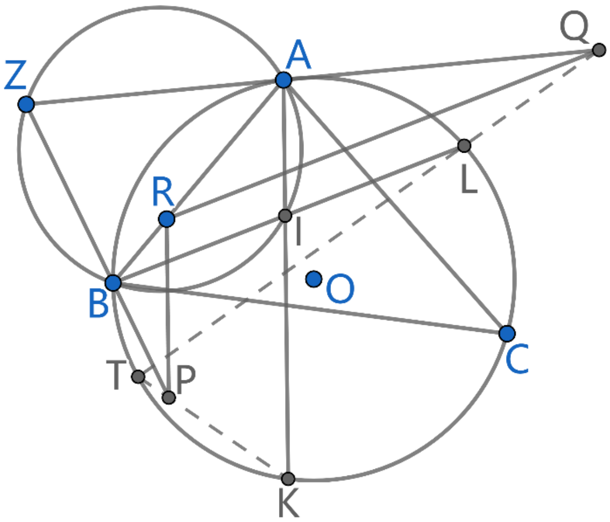

例 9. 在 $\triangle ABC$ 中，$I$ 是内心，直线 $AI$ 与 $BC$ 交于点 $D$，与 $\triangle ABC$ 外接圆交于另一点 $M$ 。$\triangle DBM,\triangle DCM$ 的内心分别为 $J,K$， 点 $I$ 关于 $J,K$ 的对称点为 $P$ 。求证： $PB\perp PC$ 。



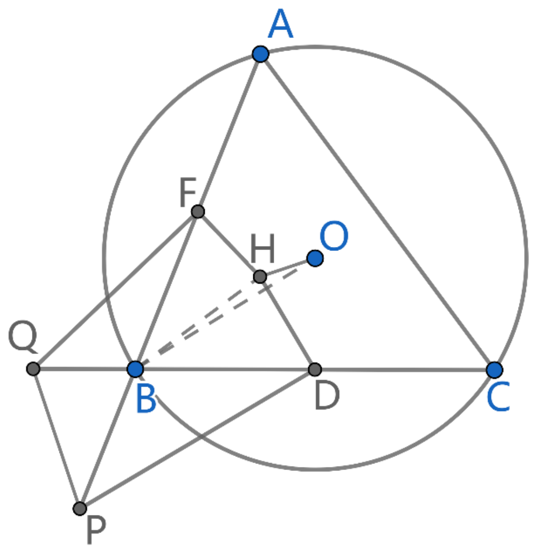
例 10.（1997，IMO 预选题）已知$\triangle ABC$的内心为$I$， $AI,BI,CI$分别交其外接圆$\odot O$于点$K,L,M$， $R$在$AB$上，点$P,Q$满足$RP/\!/AK,PB\perp BL,RQ/\!/BL,QA\perp AK$。求证：$MR,QL,PK$三线共点。




例 11. 已知$\triangle ABC$的内心为$I$， $AI,BI$分别交其外接圆$\odot O$于点$K,L$， $R$在$AB$上，点$P,Q$满足$RP/\!/AK,RQ/\!/BL$， $PB$交$QA$于$Z$，且$I,A,Z,B$四点共圆。求证：$QL,PK$的交点在$\triangle ABC$的外接圆上。



例 12. $O,H$ 分别是 $\triangle ABC$ 的外心、垂心，$D,F$ 分别是 $BC,AB$ 的中点，$P,Q$ 分别在 $BA,BC$ 上，且满足 $DP\perp DH, FQ\perp FH$。求证：$PQ\perp OH$。




例 13.（2020，东南数学奥林匹克）如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=\angle ADC<\frac{\pi}{2}$，以 $AC$ 为直径的圆与边 $BC,CD$ 的另一个交点分别为 $E,F$。设 $M$ 为 $BD$ 的中点，作 $AN\perp BD$ 于点 $N$。求证：$M,N,E,F$ 四点共圆。