综合练习-1

例 1. 数列$a_1,a_2,\ldots$定义为$\sum\limits_{k|n}a_k=2^n$对任意正整数n成立。求证：$m\mid a_m$。

例 2. 证明：有无穷多组正整数(a,b)，它们的每位均是$7,8,9$，且ab的每位也是$7,8,9$。

例 3. 无限棋盘上只考虑横竖连珠的五子棋，求必不败策略。

例 4. 设集合 S 满足 $|S|=17$， $A_1, A_2, ..., A_{68} \subset S$ ， $|A_i|=5\ (1 \le i \le 68)$ ，

$|A_i \cap A_j| \le 2\ (1 \le i < j \le 68)$ 。求证:

（1）存在 $M \subset S, |M|=8$，满足对任意 $1 \le i \le 68$ 都有 $M \cap A_i \ne \varnothing$；

（2）对任意 $M \subset S, |M|=7$，存在 $1 \le i \le 68$ 使得 $A_i \cap M = \varnothing$ 。

例 5.（2001，IMO）有 21 男 21 女参加一次数学竞赛，每人至多做出 6 题，且对每对男女均有至少一题都被他们解决。求证：必有一题被至少三男三女解决。

例 6. 设集合 $A\subset\mathbb{Z}_+$，$|A|=n$。证明：存在 $B\subset A$，满足 $|B|>\frac{n}{3}$，且对任意 $u,v\in B$，都有 $u+v\notin B$。

例 7. p 是奇质数，求 $\prod_{k=1}^{p-1}(1+k+k^2)$ 除以 p 的余数。

例 8. 设集合 $A\neq B$，$A,B\subset\mathbb{Z}_+$，S,T 是可重集。$S=\{u+v\mid u<v,u,v\in A\}$，$T=\{u+v\mid u<v,u,v\in B\}$，$S=T$。求证：存在非负整数 m，使得 $|A|=|B|=2^m$。

例 9. 设 $x,y>0,x+y=1$，正整数 $m,n\geq 2$。求证：$(1-x^m)^n+(1-y^n)^m>1$。

例 10. 设 n 是大于 1 的整数，记 $\xi_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n},k=1,2,...,n-1$。试求下式的最简表示：$\prod\limits_{1\leq j<k\leq n-1}(\xi_j-\xi_k)^2$。

例 11. 给定正整数 r,s,t 满足 $1<r<s<t$。设 n 个正实数 $x_1,x_2,...,x_n$ 满足条件

$\frac{x_j}{x_{j+1}}\leq 1+\frac{t-s}{j+s},j=1,2,...,n-1$。对所有这样的 n 个正实数，试求

$\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k(k+1)...(k+t-1)x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}(k+r)(k+r+1)...(k+t-1)x_k}$ 的最小值。