向量法入门

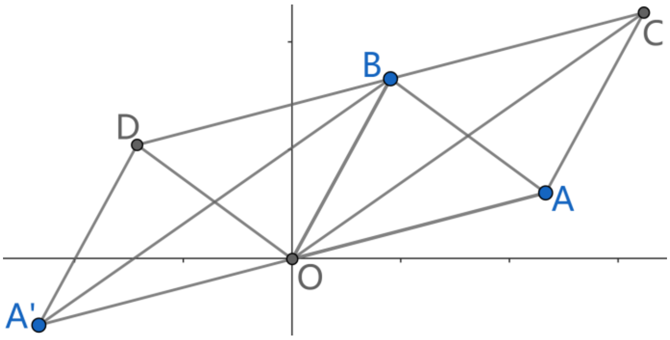
一、知识要点

记号和约定：设 P 为平面上一点，在不产生混淆的情况下，约定 $P=\vec{P}=\overrightarrow{OP}$，其中 O 为选好的或任取的原点。

向量法的基础知识：

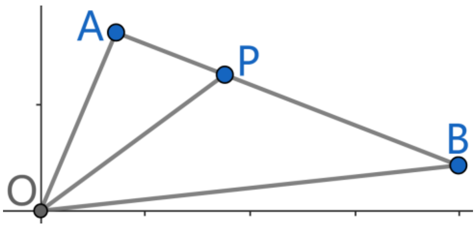
（1）向量的基本运算：加法，减法，数乘；下图中，$A'=-A$，$C=A+B$，

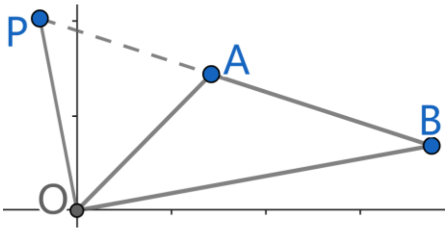
$D=A'+B=B-A=\overrightarrow{AB}$。



（2）定比分点：A,B 两点不重合，则有：(i)点 P 在线段 AB 上当且仅当存在

$\lambda,\mu\ge 0,\lambda+\mu=1$，使得 $P=\lambda A+\mu B$，此时 $\lambda=\dfrac{PB}{AB},\mu=\dfrac{AP}{AB}$；(ii)点 P 在直线 AB 上当且仅当存在 $\lambda,\mu\in\mathbb{R},\lambda+\mu=1$，使得 $P=\lambda A+\mu B$。





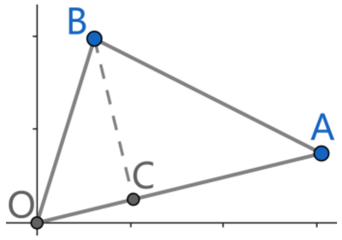
（3）平面向量的点乘和叉乘：设 $O(0,0), A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), \alpha=\angle AOB$ 为沿逆时针方向的有向角，$[OAB]$ 为有向面积，它的符号由 O,A,B 三点的定向决定。设 $r_1=|OA|$，

$r_2=|OB|, x_1=r_1\cos\theta_1, y_1=r_1\sin\theta_1, x_2=r_2\cos\theta_2, y_2=r_2\sin\theta_2$，那么 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的点乘定义如下：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|OA|\cdot|OB|\cos\alpha=r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)$

$=r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)=x_1x_2+y_1y_2$；

$\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的叉乘定义如下：$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=|OA|\cdot|OB|\sin\alpha$

$=r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1)=r_1r_2(\cos\theta_1\sin\theta_2-\cos\theta_2\sin\theta_1)=x_1y_2-x_2y_1=2[OAB]$。



（4）点乘和叉乘都是双线性函数，点乘是交换的，叉乘是反交换的。也就是说，设 $\lambda,\mu\in\mathbb{R},\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\in\mathbb{R}^2$，则有：

$(\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}+\mu\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$；

$\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta}+\mu\vec{\gamma})=\lambda\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\mu\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$；

$(\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta})\times\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}\times\vec{\gamma}+\mu\vec{\beta}\times\vec{\gamma}$；

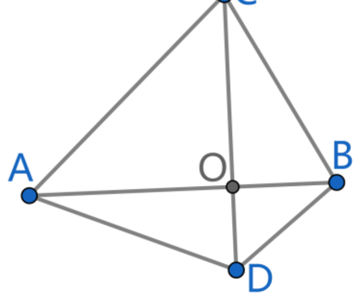
$\vec{\alpha}\times(\lambda\vec{\beta}+\mu\vec{\gamma})=\lambda\vec{\alpha}\times\vec{\beta}+\mu\vec{\alpha}\times\vec{\gamma}$；

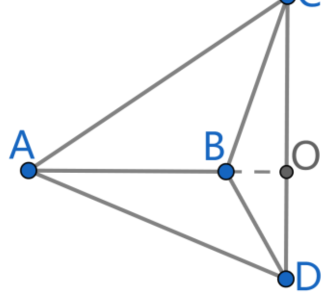
$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$，$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=-\vec{\beta}\times\vec{\alpha}$，$\vec{\alpha}\times\vec{\alpha}=0$。

（5）点乘和叉乘还有下列重要的几何意义：$\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}=|\vec{\alpha}|^2$；$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ 当且仅当 $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$；

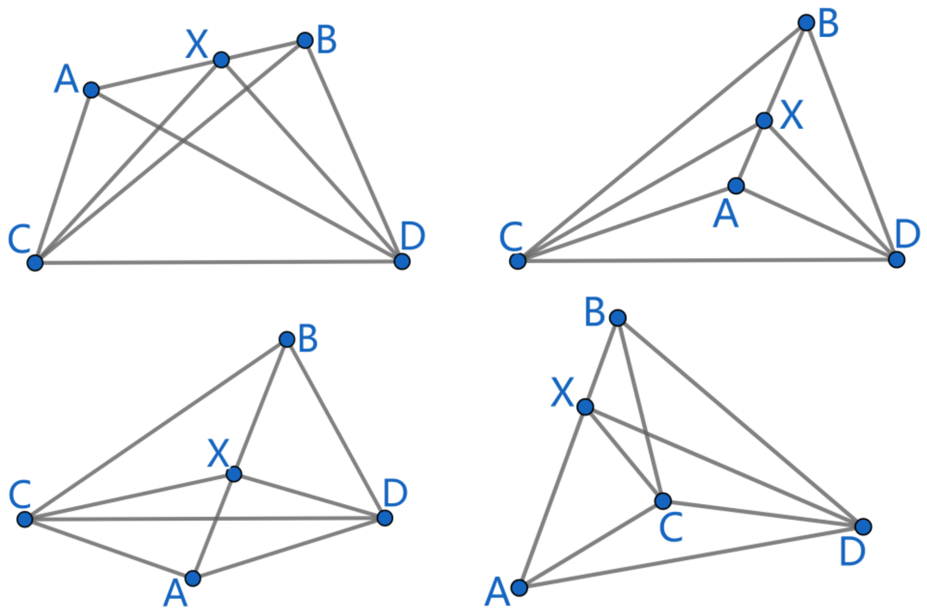
$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=0$ 当且仅当 $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$。特别地，$O,A,B$ 三点共线当且仅当 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=2[OAB]=0$。

定理 1.（定差幂线定理）A,B,C,D 是平面上（或空间中）的四个点，则 $AB\perp CD$ 当且仅当 $AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$。

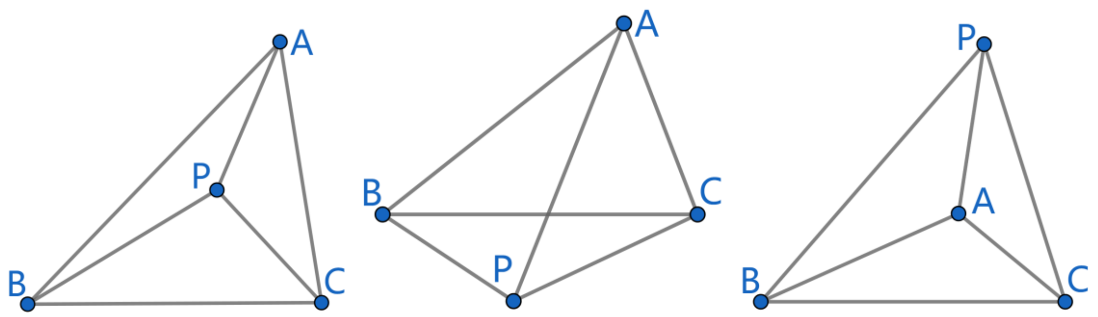




定理 2.（面积形式的定比分点定理）在平面上任给四点 A,B,C,D，其中无三点共线。在线段 AB 上任取一点 X，满足 $X=\lambda A+\mu B$，$\lambda,\mu\geq 0,\lambda+\mu=1$，我们有：(1) 若点 A,X,B 均在直线 CD 的同侧，则 $[XCD]=\lambda[ACD]+\mu[BCD]$；(2) 若点 A 与点 X 在直线 CD 的异侧，则 $[XCD]=-\lambda[ACD]+\mu[BCD]$。



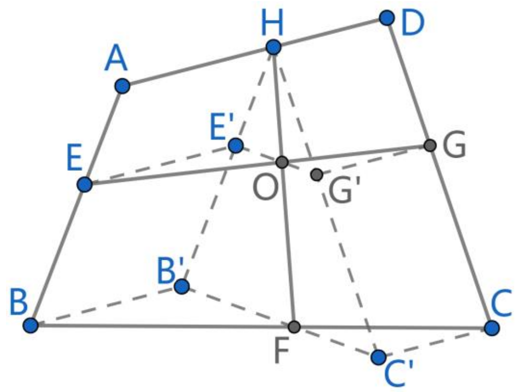
定义 1. 平面上一点 P 关于 $\triangle ABC$ 的重心坐标为 $P=(x,y,z)$，其中 x,y,z 满足 $x=\dfrac{[PBC]}{[ABC]},y=\dfrac{[PCA]}{[BCA]},z=\dfrac{[PAB]}{[CAB]}$，$x+y+z=1$，且对平面上任意一点 O，都有 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，这里使用三角形的有向面积，$\dfrac{[PBC]}{[ABC]}>0$ 当且仅当点 P,A 在直线 BC 的同侧。



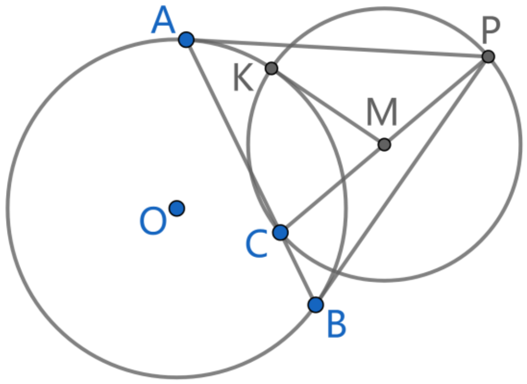
二、例题精讲

例 1. 任意给定两个正数a,b，在凸四边形$ABCD$各边上分别取一点E,F,G,H，使得

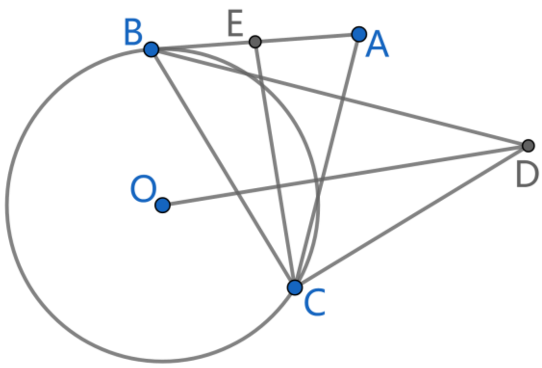
$\frac{AE}{EB}=\frac{DG}{GC}=a$，$\frac{AH}{HD}=\frac{BF}{FC}=b$，$EG$交$HF$于$O$。求证：$\frac{HO}{OF}=a$，$\frac{EO}{OG}=b$。



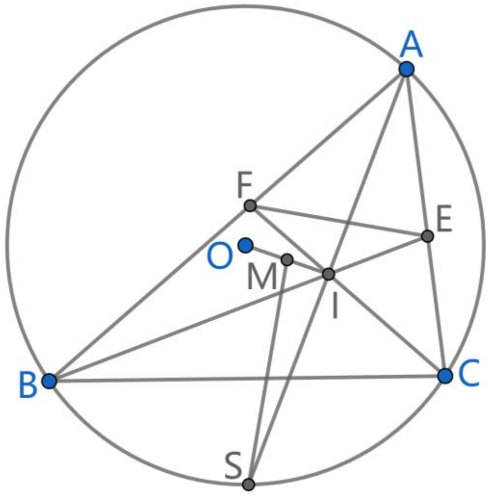
例 2. 过$\odot O$外一点P作$\odot O$的两条切线PA,PB，切点分别为A,B。点C是直线AB上一点，M是PC的中点，以PC为直径作圆与$\odot O$的一个交点为K。求证：$MK\perp OK$。



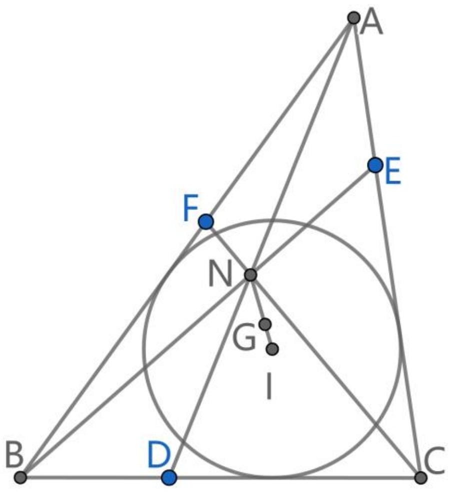
例 3. 直线AB与$\odot O$相切于B，点C在$\odot O$上，$BC\perp CD$，$AC\perp BD$，点E在线段AB上，$CE\perp OD$。求证：$AE=BE$。



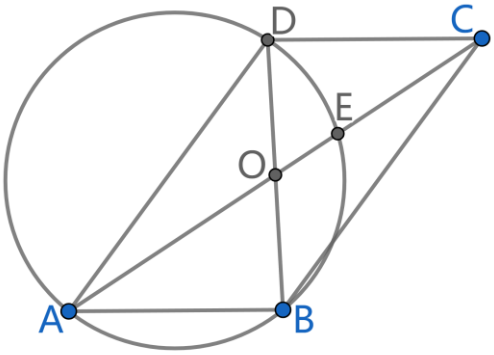
例 4. $\triangle ABC$ 内接于$\odot O$，点I是$\triangle ABC$的内心，BI, AC相交于E，CI, AB相交于F，AI延长线交$\odot O$于S，点M是IO的中点。求证：$SM \perp EF$。



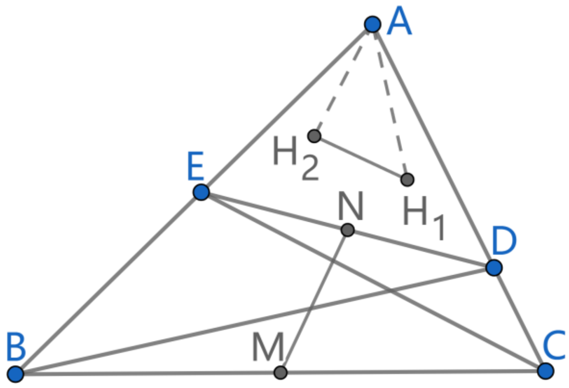
例 5. $\triangle ABC$中，设点A所对的旁切圆在BC边上的切点为D，点B所对的旁切圆在AC边上的切点为E，点C所对的旁切圆在AB边上的切点为F，设G, I分别为$\triangle ABC$的重心和内心。求证：(1) AD, BE, CF三线共点，设它为N；(2) N, G, I三点共线，G在线段NI上，且$NG = 2GI$。



例 6.（2023，高联预赛江西）过平行四边形 $ABCD$ 的顶点 A,B,D 作一圆交直线 AC 于点 E 。求证：$AB^2+AD^2=AC\cdot AE$ 。



例 7. 在 $\triangle ABC$ 的边 AC,AB 上分别任取一点 D,E 。M,N 分别是线段 BC,DE 的中点，点 H_1,H_2 分别是 $\triangle ABD,\triangle ACE$ 的垂心。求证：$H_1H_2\perp MN$ 。



例 8. 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，$AB=CD$，L 是 AC 的中点，M 是 AB 的中点，N 是 DL 的中点，K 在线段 MN 上，$MK=2KN$ 。求证：$OK\perp AD$ 。