

组合问题-1

组合问题-1

例 1. 香蕉共和国的居民语言中，单词的数目多于其字母表中字母的数目。证明：存在正整数 k ，使得可以找出 k 个不同的单词，他们的拼写中刚好用到了 k 个不同的字母。

例 2. 方格平面中将一些方格染红色，设任意 2×3 矩形块中的红色方格都不多于 3 个。求证：全平面可以分割为 1×2 的块，使得每块中的红色方格都不多于 1 个。

例 3. 一支卫队共有 169 人，每天 4 人执勤。是否可能若干天内任意两个人恰有一次同一天执勤？

例 4. 晚会上来了 100 人。然后，在与会者中没有熟人的人都离开了晚会。接着，在剩下的人中恰有一个熟人的人都离开了晚会。再接着，在剩下的人中恰有 2,3,4,...,99 个熟人的人依次全都离开了晚会。试问最后最多可有多少人留下？

例 5. 设正整数 $n \geq 2$ ，正整数 $m \geq 2^{n-1} + 1$ 。证明： $\{1, 2, \dots, n\}$ 的任意 m 个不同的非空子集 $A_j, j = 1, 2, \dots, m$ 中，都存在互不相同的 i, j, k ，使得 $A_i \cup A_j = A_k$ 。

例 6. 10×10 的棋盘每个方格放有一枚棋子，每次操作可以选择一条平行于对角线且上面放有偶数枚棋子的直线，取走其中的任一枚棋子。最多能取走多少个棋子？

例 7. 从集合 $\{1, 2, 3, \dots, 2009\}$ 中选取 k 对数组 a_i, b_i (其中 $a_i < b_i$) 使得没有两对数组有公共的元素。假设所有的和 $a_i + b_i$ 都互不相同且都不超过 2009, 求 k 的最大值。

例 8. 在一个存在故障的由 25 盏灯构成的 5×5 的方阵中, 按动其中一盏灯的开关, 该灯及其所在行与列的所有与之相邻的灯的状态都将改变 (或由熄灭变为开启, 或由开启变为熄灭)。开始时, 所有灯都是熄灭的, 在按动若干次开关后, 恰有一盏灯是开启的。试求这盏开启的灯的所有可能的位置。

例 9. 设 P 是一个凸 n 边形, 在 P 的内部不相交的任意 $n-3$ 条对角线构成的集合将 P 分割成 $n-2$ 个三角形。如果 P 是正 n 边形, 且存在 P 的一个分割, 使得分割出的三角形都是等腰三角形 (含正三角形), 求 n 的所有可能值。

例 10. 平面上作出 $2n+1$ 条直线。求证：三边都在这些直线上的锐角三角形的个数不多于 $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 。

例 11. 对任一正整数可在它的十进制记法中插入加号计算和数（例如对 1234567 可得 $1234+5+67=1306$ ），对于和数可以继续进行操作。求证：每个正整数都可经不多于 10 步操作变为一位数。

例 12. 求作一个 1990 边形，它的各内角相等，各边长分别为 $1^2, 2^2, \dots, 1990^2$ 。事实上，本题中 1990 可以改为任意 $n = 2pq$ ， $p, q \geq 3$ 为互质的正奇数。