

## 组合问题-1

### 组合问题-1

例 1. 香蕉共和国的居民语言中，单词的数目多于其字母表中字母的数目。证明：存在正整数  $k$ ，使得可以找出  $k$  个不同的单词，他们的拼写中刚好用到了  $k$  个不同的字母。

例 2. 方格平面中将一些方格染红色，设任意  $2 \times 3$  矩形块中的红色方格都不多于 3 个。求证：全平面可以分割为  $1 \times 2$  的块，使得每块中的红色方格都不多于 1 个。

例 3. 一支卫队共有 169 人，每天 4 人执勤。是否可能若干天内任意两个人恰有一次同一天执勤？

## 组合问题-1

例 4. 晚会上来了 100 人。然后，在与会者中没有熟人的人都离开了晚会。接着，在剩下的人中恰有一个熟人的人都离开了晚会。再接着，在剩下的人中恰有 2,3,4,...,99 个熟人的人依次全都离开了晚会。试问最后最多可有多少人留下？

例 5. 设正整数  $n \geq 2$ ，正整数  $m \geq 2^{n-1} + 1$ 。证明： $\{1, 2, \dots, n\}$  的任意  $m$  个不同的非空子集  $A_j, j = 1, 2, \dots, m$  中，都存在互不相同的  $i, j, k$ ，使得  $A_i \cup A_j = A_k$ 。

例 6.  $10 \times 10$  的棋盘中每个方格放有一枚棋子，每次操作可以选择一条平行于对角线且上面放有偶数枚棋子的直线，取走其中的任一枚棋子。最多能取走多少个棋子？

## 组合问题-1

例 7. 从集合  $\{1, 2, 3, \dots, 2009\}$  中选取  $k$  对数组  $a_i, b_i$  (其中  $a_i < b_i$ ) 使得没有两对数组有公共的元素。假设所有的和  $a_i + b_i$  都互不相同且都不超过 2009, 求  $k$  的最大值。

例 8. 在一个存在故障的由 25 盏灯构成的  $5 \times 5$  的方阵中, 按动其中一盏灯的开关, 该灯及其所在行与列的所有与之相邻的灯的状态都将改变 (或由熄灭变为开启, 或由开启变为熄灭)。开始时, 所有灯都是熄灭的, 在按动若干次开关后, 恰有一盏灯是开启的。试求这盏开启的灯的所有可能的位置。

例 9. 设  $P$  是一个凸  $n$  边形, 在  $P$  的内部不相交的任意  $n-3$  条对角线构成的集合将  $P$  分割成  $n-2$  个三角形。如果  $P$  是正  $n$  边形, 且存在  $P$  的一个分割, 使得分割出的三角形都是等腰三角形 (含正三角形), 求  $n$  的所有可能值。

例 10. 平面上作出  $2n+1$  条直线。求证：三边都在这些直线上的锐角三角形的个数不多于  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 。

例 11. 对任一正整数可在它的十进制记法中插入加号计算和数（例如对 1234567 可得  $1234+5+67=1306$ ），对于和数可以继续进行操作。求证：每个正整数都可经不多于 10 步操作变为一位数。

例 12. 求作一个 1990 边形，它的各内角相等，各边长分别为  $1^2, 2^2, \dots, 1990^2$ 。事实上，本题中 1990 可以改为任意  $n = 2pq$ ， $p, q \geq 3$  为互质的正奇数。