组合问题-2

这份讲义来自付云皓老师，原标题为反证法，抽屉原理和极端原理问题选讲。

例 1. 给定正整数 n 和 $M > 2\cdot(\frac{3}{2})^n$ 个 n 元 $0,1,2$ 序列。求证：存在三个序列，它们的每一项中都有至少两个数是相同的。

例 2. 平面上有 n 个点 $(n \geq 3)$，任意三点不共线，求证：可以将它们分别标为 $P_1, P_2, ..., P_n$，使得对任意 $i \in \{1, 2, ..., n-2\}$，$\angle P_i P_{i+1} P_{i+2}$ 是锐角。

例 3. 平面上有 n 个点，对任意两点，我们在它们连的边上写下 $\lfloor \log_2 d \rfloor$，这里 d 是这两点之间的距离。求证：我们写下的不同整数不超过 $2n-2$ 个。

例 4. 设 n 是一个正整数，有 $S=\{0,1,...,2n-1\}$ 的 $2n$ 个非空子集（可能相同），它们的元素个数之和为 $n(2n+1)$ 。求证：可以从每个子集中选出一个数，使得选出的所有数之和恰为 $n(2n-1)$ 。

例 5. 对图 G ，定义图 G' 如下，其顶点与 G 的顶点相同，而两个顶点 u,v 之间有连边，当且仅当 u,v 在 G 中有公共邻居。假设某图 G 与 $(G')'$ 同构，求证：G 与 G' 同构。

例 6. 一个13×13的方格表的每个方格里有一个整数，求证：我们可以选择 2 行 4 列，使得它们交叉处的 8 个方格内的数之和是 8 的倍数。

例 7. 圆周上有 101 枚硬币，每枚硬币的质量都是 10 克或者 11 克。求证：
（1）存在一个硬币，其顺时针接下来的 50 枚硬币质量之和等于其逆时针接下来 50 枚硬币质量之和。
（2）存在一个硬币，其顺时针接下来的 49 枚硬币质量之和等于其逆时针接下来 49 枚硬币质量之和。

例 8. 正整数数列$a_1,a_2,a_3,\ldots$被称为巴西数列，如果$a_1=1$，而a_n是大于a_{n-1}，且至少与$a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}$中一半的数互素的最小正整数。是否有不在巴西数列中的正奇数？

例 9.（2021，中国数学奥林匹克）设 $n(n \geq 3)$ 位科学家参加会议，每位科学家都有一些朋友参会（朋友关系是相互的，且每个人不是自己的朋友）。已知无论怎样将这些科学家分成非空的两组，总存在同组的两位科学家是朋友，也存在不同组的两位科学家是朋友。第一天，会议提出了一项议题，每位科学家对此议题的赞成度可用一个非负整数表示。从第二天起的每一天，每位科学家的赞成度变成其所有朋友前一天的赞成度的平均数的整数部分。求证：经过若干天之后，所有科学家的赞成度都相等。

例 10. 在一棵树的每个顶点处都有一些芯片，在每一轮操作中，如果一个顶点的芯片数不少于它的邻居数，那么这个顶点给它每个邻居 1 个芯片（所有顶点一起操作）。求证：每个顶点的芯片数量构成的状态是最终周期的，且周期为 1 或 2。