组合问题-4

这份讲义来自付云皓老师，原标题为计数方法与母函数问题选讲。

例 1. 平面上有 $n(n\geq 4)$ 个点，任意三点不共线。求证：以这些点中的四个点为顶点的面积为 1 的平行四边形不超过 $\frac{n^2-3n}{4}$ 个。

例 2. 平面上有 16 个点，其中任意三点不共线，现在要将它们两两配对连线段，且使得任意两条线段不交，求方法数的最小可能值。

例 3. 设 m,n 是正整数，$m\geq 3$，$A_1,A_2,...,A_m$ 是 m 个两两不交的 n 元正整数集，且满足对任意 $1\leq i\leq m$ 及任意 $a\in A_i$, $b\in A_{i+1}$，均有 $b\nmid a$ （这里 $A_{m+1}=A_1$）。求满足下面条件的正整数对 (u,v) 的数目的最大值：u,v 分别属于 $A_1,A_2,...,A_m$ 中的两个不同集合，且 $u\mid v$。

例 4. 设 n 是一个正整数，A 是 $\{1,2,...,n\}$ 的一个子集，一个把 n 分成 k 部分的 A -分割是指将 n 写成 k 个数和的形式 $n=a_1+a_2+...+a_k$，其中 $a_1,a_2,...,a_k$ 都在 A 中，但不必不同。在此分割中，不同部分数是指 $\{a_1,a_2,...,a_k\}$ 中不同的元素个数。我们称一个把 n 分成 k 部分的 A -分割是“最优的”，如果对任意 $r<k$，不存在把 n 分成 r 部分的 A -分割。求证：对于任意一个把 n 分成若干部分的“最优的”分割，其不同部分数均不超过 $\sqrt[3]{6n}$。

例 5. 设奇数 $p\geq 19$，我们将 $0,1,...,p-1$ 染成两种颜色，然后互相独立且等可能随机地选择 $x_i\in\{0,1,...,p-1\}$，$i=1,2,...,p$。求证：无论染色方式如何，$x_1,x_2,...,x_p$ 同色且和是 p 的倍数的概率不小于 $\dfrac{3}{p\cdot 2^p}$。

例 6. 有 1000 名同学参加夏令营，每名同学在夏令营里恰有 11 个朋友（朋友是相互的，自己不是自己的朋友）。夏令营一共准备了 7 种颜色的营服，在夏令营开幕式拍大合照时，每名同学都穿上了夏令营的营服，且任意一对朋友穿的营服颜色不同。主办方想让部分同学更换衣服的颜色后再拍一张合照，且仍保证任意一对朋友穿的营服颜色不同。但是，有 80 名同学因为尺码问题无法更换衣服的颜色。求证：可以让剩下学生中若干名（至少一名）学生更换衣服的颜色，使得仍保证任意一对朋友穿的营服颜色不同。

例 7. 对整数 $n \geq 2$，考虑一张 $n \times n$ 的方格表，最开始每个方格都是空的，我们可以进行如下操作:

（1）如果某个方格（不能是最右边一列或最上面一行的方格）与其上方、右方邻格都是空的，那么我们可以在这 3 个方格里各放上一枚石子;

（2）如果某一行的每个方格里都有石子，那么我们可以拿掉这一行的所有石子;

（3）如果某一列的每个方格里都有石子，那么我们可以拿掉这一列的所有石子。

求所有的 n，使得我们可以经过有限次（至少一次）操作，将方格表再变回所有方格为空的状态。

例 8. 设 $G=G(V,E)$ 是一个有 n 个顶点的简单图，如果能将顶点集 V 分为两个非空的部分 A,B，使得连接 A,B 的边数不超过 100，那么连接 A,B 的每条边都可以被称为“瓶颈边”。求证：“瓶颈边”的数目不超过 $100n$。

例 9.（Erdős-Ginzburg-Ziv 定理）设 n 是正整数，求证：在任意 $2n-1$ 个整数中，必然存在 n 个数，它们的和是 n 的倍数。

[提示：先用计数方法证明 n 是素数的情形。再用归纳法从 $n=m,k$ 时的命题推出 $n=mk$ 时的命题。]