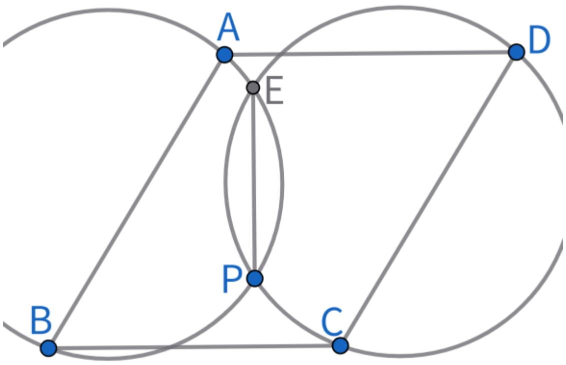
综合练习-2

这份讲义来自 2023 年莫斯科数学奥林匹克，十一年级组。

例 1. 在函数 $y=\cos x$ 与 $y=a\tan x$ 图像的任一交点处分别作它们的切线。证明：对任意 $a\neq 0$，这两条切线都相互垂直。

例 2. 设平行四边形 $ABCD$ 不是矩形。在其内部取一点 P，使得 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PCD$ 的外接圆的公共弦垂直于 AD。证明：这两个外接圆的半径相等。



例 3. 给定一个次数为 $n>5$ 的整系数多项式 $P(x)$，已知它有 n 个不同的整数根。证明：多项式 $P(x)+3$ 有 n 个不同的实根。

例 4. 多于四名运动员参加网球训练（没有平局）。每个训练日，每名选手恰好参加一场训练。训练结束时，每名选手都恰好与其他所有选手各比赛一次。若一名选手至少赢过一场，并且在取得首胜之后再也没有输过，则称他为“顽强的”，其余选手称为“非顽强的”。是否在多于一半的训练日中，都存在一场比赛，其双方选手都是非顽强的？

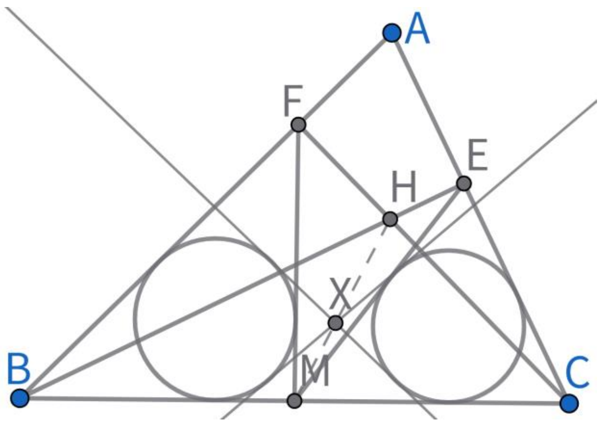
例 5. 某四面体的所有四条高的中点都在其内切球面上。问：该四面体是否一定是正四面体？

例 6. 称三个实数构成一个“三联体”，如果其中一个数是另外两个数的算术平均数。给定一个由正整数组成的无穷数列 $\{a_n\}$，已知 $a_1 = a_2 = 1$，且对于 $n > 2$，a_n 是使 $a_1, a_2, ..., a_n$ 中不包含三联体的最小正整数。证明：对任意 n，都有 $a_n \le \frac{n^2+7}{8}$。

例 7. 给定严格上升的函数 $f:\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$（其中 $\mathbb{N}_0$ 是非负整数集合），对任何 $m,n \in \mathbb{N}_0$，满足关系式 $f(n+f(m)) = f(n)+m+1$。试求 $f(2023)$ 的一切可能值。

例 8. 最少需要有多少个不同的整数，才有可能从它们中既可选出长度为 5 的等差数列，又可选出长度为 5 的等比数列？

例 9. 在 $\triangle ABC$ 中，高 BE 与高 CF 相交于点 H，而 M 是边 BC 的中点，X 则是 $\triangle BMF$ 与 $\triangle CME$ 的内切圆的内公切线的交点。证明：X, M, H 三点共线。



例 10. 今有一架绝对精确的双盘天平和 50 个砝码，这些砝码的重量分别为 $\arctan 1, \arctan \frac{1}{2}, \arctan \frac{1}{3}, ..., \arctan \frac{1}{50}$。证明：可以从中选出 10 个砝码，每端放 5 个，使得天平平衡。

例 11. 分别以 B, P, T 表示凸多面体的顶点数目，棱数和具有公共顶点的三角形面的最大数目。证明：$B\sqrt{P+T} \geq 2P$。

[例如在四面体中，$B=4, P=6, T=3$，满足等式；而对于三棱柱（$B=6, P=9, T=1$）和立方体（$B=8, P=12, T=0$）则成立严格不等式。]