哈代，卡莱曼，希尔伯特：高等不等式的开端

笔者最近没有在给中学生讲不等式专题，而且本文中的不等式也不适合讲给高中数学竞赛的初学者。这篇短文的主要内容是几年前写的，现在发出来一是觉得这些不等式漂亮而且（在高等数学里）重要，二是给以前没写完的文章封个口。与几乎只在数学竞赛中出现的平面几何不同，不等式无论在数学竞赛还是前沿的数学研究中都是一个重要的方向。数学竞赛里考察的是初等不等式，但笔者在搜索中发现似乎很少有高等不等式的说法。之所以标题里会这样写，是为了和初等不等式作对比，彰显它们在本科以上的分析学中的重要地位。我们先从一些文中用到的基础知识说起。

定理 0.1 ($*/\infty$型的Stolz-Cesáro定理)**.** 设$\{a_n\}_{n\geq 1}$，$\{b_n\}_{n\geq 1}$是两个实数列，$b_n>0$，$n\geq 1$，且级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散。若存在极限$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=C$，则有$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i}=C$ ①，这里C可以取$\pm\infty$。

证. （1）先考虑C有限的情形。对任意$\epsilon>0$，存在正整数n_0，使得对任意的$n\geq n_0$，都有$|\dfrac{a_n}{b_n}-C|<\epsilon$，即$|a_n-Cb_n|<\epsilon b_n$。存在正整数$n_1>n_0$，使得对任意的$n\geq n_1$，都有$\epsilon\sum_{i=n_0+1}^{n} b_i>\sum_{i=1}^{n_0}|a_i-Cb_i|$。于是$N>n_1$时，有

$$|\sum_{i=1}^{N} a_i-C\sum_{i=1}^{N} b_i|\leq\sum_{i=1}^{N}|a_i-Cb_i|\leq\sum_{i=1}^{n_0}|a_i-Cb_i|+\sum_{i=n_0+1}^{N}\epsilon b_i\leq 2\epsilon\sum_{i=1}^{N} b_i,$$

所以$N>n_1$时，$|\dfrac{\sum_{i=1}^{N} a_i}{\sum_{i=1}^{N} b_i}-C|\leq 2\epsilon$，①式得证。

（2）$C=\pm\infty$时，不妨设$C=+\infty$。则对任意$M>0$，存在正整数n_0，使得对任意的$n\geq n_0$，都有$\dfrac{a_n}{b_n}>M+1$，即$a_n>(M+1)b_n$。存在正整数n_1，使得对任意的$n\geq n_1$，都有$\sum_{i=1}^{n} b_i>\sum_{i=1}^{n_0}|a_i-Mb_i|$。于是$N>N_0=\max(n_0,n_1)$时，有

$$\sum_{i=1}^{N} a_i-M\sum_{i=1}^{N} b_i\geq-\sum_{i=1}^{n_0}|a_i-Mb_i|+\sum_{i=n_0+1}^{N} b_i\geq 0,$$

所以$N>N_0$时，$\dfrac{\sum_{i=1}^{N} a_i}{\sum_{i=1}^{N} b_i}\geq M$，①式得证。 □

英国数学家哈代（Godfrey Harold Hardy，1877年—1947年）是华罗庚和印度天才数学家拉马努金的老师。他在分析学，尤其是解析数论领域留下了许多重要工作。他于1920年发表并证明了下述不等式:

定理 0.2 (哈代不等式)**.** （1）离散形式：设$\{a_n\}_{n\geq 1}$是一列非负实数，则对任何实数$p>1$，我们有

$$\sum_{n\geq 1}(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n})^p\leq(\frac{p}{p-1})^p\sum_{n\geq 1} a_n^p, \qquad ①$$

（2）积分形式：设$f:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$是一个非负可测函数，则

$$\int_0^{+\infty}(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t)^p\leq(\frac{p}{p-1})^p\int_0^{+\infty} f(x)^p\mathrm{d}x, \qquad ②$$

证. （1）$k\geq 1$时，设$A_k=\dfrac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} a_j$，令$A_0=0$，则$a_k=kA_k-(k-1)A_{k-1}$，$k\geq 1$。对固定的$N\in\mathbb{Z}_+$，

我们先证明$\sum_{k=1}^N A_k^p \le \frac{p}{p-1}\sum_{k=1}^N a_k A_k^{p-1}$ ③。由均值不等式，$pA_{k-1}A_k^{p-1} \le A_{k-1}^p + (p-1)A_k^p$，所以

$$③右边-左边 = \frac{p}{p-1}\sum_{k=1}^N((kA_k-(k-1)A_{k-1})A_k^{p-1}-A_k^p) = \sum_{k=1}^N(\frac{pk}{p-1}-1)A_k^p$$

$$-\frac{p}{p-1}\sum_{k=1}^N(k-1)A_{k-1}A_k^{p-1} \ge \sum_{k=1}^N(\frac{pk}{p-1}-1)A_k^p - \sum_{k=1}^N(k-1)(\frac{A_{k-1}^p}{p-1}+A_k^p)$$

$$= \sum_{k=1}^N(\frac{pk}{p-1}-1-(k-1))A_k^p - \sum_{k=0}^{N-1}\frac{k}{p-1}A_k^p = \frac{N}{p-1}A_N^p \ge 0,$$

最后一个等号是因为$1\le k\le N-1$时，$\frac{pk}{p-1}-1-(k-1)-\frac{k}{p-1}=0$，③式得证。由赫尔德不等式，

$$③式右边 \le \frac{p}{p-1}(\sum_{k=1}^N a_k^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{k=1}^N A_k^{(p-1)\cdot\frac{p}{p-1}})^{\frac{p-1}{p}} = \frac{p}{p-1}(\sum_{k=1}^N a_k^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{k=1}^N A_k^p)^{\frac{p-1}{p}},$$

由③式，有$\sum_{k=1}^N A_k^p \le \frac{p}{p-1}(\sum_{k=1}^N a_k^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{k=1}^N A_k^p)^{\frac{p-1}{p}}$，$\sum_{k=1}^N A_k^p \le (\frac{p}{p-1})^p\sum_{k=1}^N a_k^p$。上式中令$N\to\infty$即得①式。注：①式右边的常数$(\frac{p}{p-1})^p$是最优的。令$\alpha=\frac{1}{p}\in(0,1)$，$a_n=n^{-\alpha}$，$n\ge 1$，我们先证明$\lim_{N\to\infty}\frac{A_N}{a_N}=\frac{p}{p-1}$ ④。由伯努利不等式，

$$\frac{1-\alpha}{n} \ge (1+\frac{1}{n})^{1-\alpha}-1, \qquad (1-\alpha)n^{-\alpha} \ge (n+1)^{1-\alpha}-n^{1-\alpha},$$

$$\sum_{i=1}^n i^{-\alpha} \ge \frac{1}{1-\alpha}\sum_{i=1}^n((i+1)^{1-\alpha}-i^{1-\alpha}) = \frac{1}{1-\alpha}((n+1)^{1-\alpha}-1),$$

所以$A_N \ge \frac{1}{(1-\alpha)N}((N+1)^{1-\alpha}-1)$，

$$④式左边 \ge \frac{1}{1-\alpha}\lim_{N\to\infty}N^{\alpha-1}((N+1)^{1-\alpha}-1) = \frac{p}{p-1}\lim_{N\to\infty}((1+\frac{1}{N})^{1-\alpha}-N^{\alpha-1}) = \frac{p}{p-1},$$

另一边，由伯努利不等式，

$$\frac{1-\alpha}{n} \le 1-(1-\frac{1}{n})^{1-\alpha}, \qquad (1-\alpha)n^{-\alpha} \le n^{1-\alpha}-(n-1)^{1-\alpha},$$

$$\sum_{i=1}^n i^{-\alpha} \le \frac{1}{1-\alpha}\sum_{i=1}^n(i^{1-\alpha}-(i-1)^{1-\alpha}) = \frac{1}{1-\alpha}n^{1-\alpha}, \qquad A_n \le \frac{1}{1-\alpha}n^{-\alpha},$$

所以④式左边$\le\frac{1}{1-\alpha}=\frac{p}{p-1}$。综上所述，④式得证。于是$\lim_{N\to\infty}\frac{A_N^p}{a_N^p}=(\frac{p}{p-1})^p$，且正项级数$\sum_{n=1}^\infty a_n^p=\sum_{n=1}^\infty n^{-1}$发散，所以由Stolz-Cesáro定理，我们有$\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^N A_n^p}{\sum_{n=1}^N a_n^p}=\lim_{N\to\infty}\frac{A_N^p}{a_N^p}=(\frac{p}{p-1})^p$。所以①式右边的常数$(\frac{p}{p-1})^p$是最优的。

（2）哈代不等式和下述Carleman不等式的积分形式都可以仿照离散形式给出证明，本文中不再赘述。 □

瑞典数学家卡莱曼（Torsten Carleman，1892年—1949年）是Mittag-Leffler研究所的首任所长，被认为是

瑞典数学史上最有影响力的学者。致力于分析学研究的他于1923年证明了下述不等式:

定理 0.3 (Carleman不等式). （1）离散形式：设$\{a_n\}_{n\geq 1}$是一列非负实数，我们有

$$\sum_{n\geq 1}(a_1a_2...a_n)^{\frac{1}{n}}\leq \mathrm{e}\sum_{n\geq 1}a_n, \qquad ①$$

（2）积分形式：设$f:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$是一个非负可测函数，则

$$\int_0^{+\infty}\exp(\frac{1}{x}\int_0^x\log f(t)\mathrm{d}t)\mathrm{d}x\leq \mathrm{e}\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x, \qquad ②$$

证. （1）我们先证明$(n!)^{\frac{1}{n}}\geq\dfrac{n+1}{\mathrm{e}}$ ③。因为$\dfrac{(k+1)^k}{k^k}=(1+\dfrac{1}{k})^k\leq \mathrm{e}$，$k\geq 1$，所以。$\mathrm{e}^n\geq\dfrac{(n+1)^n}{n^n}\cdot\dfrac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}\cdot...\cdot\dfrac{2^1}{1^1}=\dfrac{(n+1)^n}{n!}$，③式得证。于是我们有

$$(a_1a_2...a_n)^{\frac{1}{n}}=[\frac{a_1(2a_2)...(na_n)}{n!}]^{\frac{1}{n}}\leq\frac{1}{n(n!)^{\frac{1}{n}}}(a_1+2a_2+...+na_n)\leq\frac{\mathrm{e}}{n(n+1)}(a_1+2a_2+...+na_n),$$

$$\sum_{n\geq 1}(a_1a_2...a_n)^{\frac{1}{n}}\leq\sum_{n\geq 1}\frac{\mathrm{e}}{n(n+1)}(a_1+2a_2+...+na_n)=\mathrm{e}\sum_{k\geq 1}(ka_k\sum_{n\geq k}\frac{1}{n(n+1)})=\mathrm{e}\sum_{k\geq 1}ka_k\cdot\frac{1}{k}=\mathrm{e}\sum_{k\geq 1}a_k,$$

①式得证。注：（i）③的另证：先证明$\sqrt{2\pi n}\geq(1+\dfrac{1}{n})^n$ ④。$n=1$时，$\sqrt{2\pi}>2$，$n\geq 2$时，$\sqrt{2\pi n}>\pi>\mathrm{e}>(1+\dfrac{1}{n})^n$。由斯特林近似公式和④式，$n!\geq\sqrt{2\pi n}n^n\mathrm{e}^{-n}\geq(1+\dfrac{1}{n})^n n^n\mathrm{e}^{-n}=(\dfrac{n+1}{\mathrm{e}})^n$，③式得证。（ii）①式右边的常数e是最优的。先证明$(n!)^{\frac{1}{n}}\leq\dfrac{(n+1)^{\frac{n+1}{n}}}{\mathrm{e}}$ ⑤。这是因为$\mathrm{e}\leq(1+\frac{1}{n})^{n+1}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}$，所以$\mathrm{e}^n\leq\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}\cdot\dfrac{n^n}{(n-1)^n}\cdot...\cdot\dfrac{2^2}{1^2}=\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n!}$，⑤式得证。然后设$N\in\mathbb{Z}_+$，取$a_n=\dfrac{1}{n}$，$1\leq n\leq N$，我们证明

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{1\leq n\leq N}(a_1a_2...a_n)^{\frac{1}{n}}}{\sum_{1\leq n\leq N}a_n}=\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{1\leq n\leq N}(n!)^{-\frac{1}{n}}}{\sum_{1\leq n\leq N}n^{-1}}=\mathrm{e}, \qquad ⑥$$

因为$\sum_{n\geq 1}n^{-1}$是正项级数且发散，由Stolz-Cesáro定理和⑤式，我们有:

$$⑥\text{式中间}=\lim_{N\to\infty}\frac{(N!)^{-\frac{1}{N}}}{N^{-1}}=\lim_{N\to\infty}\frac{N}{(N!)^{\frac{1}{N}}}\geq\lim_{N\to\infty}\frac{\mathrm{e}N}{(N+1)^{\frac{N+1}{N}}}=\mathrm{e}, \qquad ⑦$$

上式最右边的等号使用了

$$\lim_{N\to\infty}\frac{N}{N+1}=1,\quad \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log(N+1)=0,\quad \lim_{N\to\infty}(N+1)^{\frac{1}{N}}=\lim_{N\to\infty}\exp(\frac{1}{N}\log(N+1))=1,$$

由①式可得，⑦式中间$\leq\mathrm{e}$，于是⑥式得证。由此推出①式右边的常数e是最优的。 注：可以不使用⑤式，直接由斯特林近似公式证明⑦式中间$=\mathrm{e}$。我们有

$$N!\sim\sqrt{2\pi N}N^N\mathrm{e}^{-N},\quad (N!)^{\frac{1}{N}}\sim(\sqrt{2\pi N})^{\frac{1}{N}}\frac{N}{\mathrm{e}}\sim\frac{N}{\mathrm{e}},\quad \text{所以}\lim_{N\to\infty}\frac{N}{(N!)^{\frac{1}{N}}}=\mathrm{e},$$

这里$f(N)\sim g(N)$表示$\lim_{N\to\infty}\dfrac{f(N)}{g(N)}=1$。

法二：先证明对任意正整数n，有$\lim_{p\to\infty}(\frac{a_1^{\frac{1}{p}}+a_2^{\frac{1}{p}}+...+a_n^{\frac{1}{p}}}{n})^p=(a_1a_2...a_n)^{\frac{1}{n}}$ ⑧。设$b_i=\log a_i$，$i\geq 1$，则$p\to\infty$时，$\mathrm{e}^{\frac{1}{p}b_i}=1+\frac{1}{p}b_i+O(\frac{1}{p^2})$，所以对任意$n\geq 1$，有

$$\log((\frac{a_1^{\frac{1}{p}}+a_2^{\frac{1}{p}}+...+a_n^{\frac{1}{p}}}{n})^p)=p\log(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{\frac{1}{p}b_i})=p\log(1+\frac{1}{pn}\sum_{i=1}^{n}b_i+O(\frac{1}{p^2}))$$
$$=p(\frac{1}{pn}\sum_{i=1}^{n}b_i+O(\frac{1}{p^2}))=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_i+O(\frac{1}{p}),\qquad p\to\infty\text{时},$$

所以⑧式左边$=\lim_{p\to\infty}\exp(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_i+O(\frac{1}{p}))=$⑧式右边。由哈代不等式，

$$\sum_{n=1}^{N}(\frac{a_1^{\frac{1}{p}}+a_2^{\frac{1}{p}}+...+a_n^{\frac{1}{p}}}{n})^p\leq(\frac{p}{p-1})^p\sum_{n=1}^{N}a_n^{\frac{1}{p}\cdot p}=(\frac{p}{p-1})^p\sum_{n=1}^{N}a_n,$$

上式左右两边令$p\to\infty$即得$\sum_{n=1}^{N}(a_1a_2...a_n)^{\frac{1}{n}}\leq\lim_{p\to\infty}(\frac{p}{p-1})^p\sum_{n=1}^{N}a_n=\mathrm{e}\sum_{n=1}^{N}a_n$。再令$N\to\infty$即得①式成立。 □

德国数学家希尔伯特（David Hilbert，1862年—1943年）是19世纪末20世纪初国际数学界的领袖，也是本文的三位主角中咖位最高的大佬。他见证了哥廷根的数学在两次世界大战的战火中从繁荣转向衰败。他于20世纪初提出了下列关于二次型的不等式:

定理 0.4 (希尔伯特不等式)**.** （1）设$\{a_n\}_{n\geq 1}$，$\{b_n\}_{n\geq 1}$是两列实数，我们有

$$|\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{a_mb_n}{m+n}|\leq\pi\sqrt{(\sum_{m=1}^{\infty}a_m^2)(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2)},\qquad ①$$

（2）设$\{a_n\}_{n\geq 1}$，$\{b_n\}_{n\geq 1}$是两列非负实数，$p,q>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。我们有

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{a_mb_n}{m+n}\leq\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}(\sum_{m=1}^{\infty}a_m^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^q)^{\frac{1}{q}},\qquad ②$$

证. （1）由柯西不等式，设参数$\lambda>0$待定，我们有

$$(\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{a_mb_n}{m+n})^2\leq(\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{a_m^2}{m+n}(\frac{m}{n})^{2\lambda})(\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{b_n^2}{m+n}(\frac{n}{m})^{2\lambda}),\qquad ③$$

上式中系数$(\frac{m}{n})^{2\lambda}$，$(\frac{n}{m})^{2\lambda}$的作用是互相补偿，使右边两个括号中的二重级数收敛。使用文末附上证明的含参积分$\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+y)y^{\lambda}}\mathrm{d}y=\frac{\pi}{\sin(\pi\lambda)}$，$0<\lambda<1$ ④，我们有

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{a_m^2}{m+n}(\frac{m}{n})^{2\lambda}=\sum_{m=1}^{\infty}a_m^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m+n}(\frac{m}{n})^{2\lambda},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m+n}(\frac{m}{n})^{2\lambda}\leq\int_0^{\infty}\frac{1}{m+x}\frac{m^{2\lambda}}{x^{2\lambda}}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+y)y^{2\lambda}}\mathrm{d}y=\frac{\pi}{\sin(2\pi\lambda)},$$

为了使上式右边的积分收敛，我们要求$0<\lambda<\dfrac{1}{2}$。取$\lambda=\dfrac{1}{4}$，我们有③式右边$\leq \pi^2(\sum_{m=1}^\infty a_m^2)(\sum_{n=1}^\infty b_n^2)$，于是证明了$L^2$希尔伯特不等式①。

法二（Toeplitz法）：$n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$时，函数$t\mapsto t-\pi, 0\leq t\leq 2\pi$的傅里叶系数为

$$\int_0^{2\pi}(t-\pi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t=\frac{(t-\pi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{\mathrm{i}n}\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{\mathrm{i}n}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{\mathrm{i}n},$$

所以对实数列$a_k, b_k, k\geq 1$，我们有

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n}\Big| &= \Big|\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_0^{2\pi}(t-\pi)(\sum_{m\geq 1}a_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt})(\sum_{n\geq 1}b_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt})\mathrm{d}t\Big|\\ &\leq \frac{\|t-\pi\|_\infty}{2\pi}\int_0^{2\pi}|(\sum_{m\geq 1}a_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt})(\sum_{n\geq 1}b_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt})|\mathrm{d}t\leq \pi\|a\|_2\|b\|_2,\end{aligned}$$

①式得证。我们在最后一步使用了下列事实：设$\tilde{a}(t)=\sum\limits_{m\geq 1}a_m e^{imt}$，$\tilde{b}(t)=\sum\limits_{n\geq 1}b_n e^{int}$，由柯西不等式和Plancherel定理，我们有

$$\int_0^{2\pi}|\tilde{a}(t)\tilde{b}(t)|\mathrm{d}t\leq \|\tilde{a}\|_2\|\tilde{b}\|_2=2\pi\|a\|_2\|b\|_2,$$

（2）由赫尔德不等式和（1）问证明中的④式，我们有

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n}\leq (\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{a_m^p}{m+n}(\frac{m}{n})^{p\lambda})^{\frac{1}{p}}(\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{b_n^q}{m+n}(\frac{n}{m})^{q\lambda})^{\frac{1}{q}}, \qquad ⑤$$

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{a_m^p}{m+n}(\frac{m}{n})^{p\lambda}=\sum_{m=1}^{\infty}a_m^p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m+n}(\frac{m}{n})^{p\lambda}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m+n}(\frac{m}{n})^{p\lambda}\leq\frac{\pi}{\sin(p\pi\lambda)},$$

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{b_n^q}{m+n}(\frac{n}{m})^{q\lambda}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n^q\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m+n}(\frac{n}{m})^{q\lambda}, \qquad \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m+n}(\frac{n}{m})^{q\lambda}\leq\frac{\pi}{\sin(q\pi\lambda)},$$

所以⑤式右边 $\leq (\sum\limits_{m,n=1}^{\infty}\dfrac{a_m^p}{m+n})^{\frac{1}{p}}(\sum\limits_{m,n=1}^{\infty}\dfrac{b_n^q}{m+n})^{\frac{1}{q}}(\dfrac{\pi}{\sin(p\pi\lambda)})^{\frac{1}{p}}(\dfrac{\pi}{\sin(q\pi\lambda)})^{\frac{1}{q}}$, ⑥

我们需要最小化$(\dfrac{\pi}{\sin(p\pi\lambda)})^{\frac{1}{p}}(\dfrac{\pi}{\sin(q\pi\lambda)})^{\frac{1}{q}}$。与（1）问类似，为了使$\int_0^\infty\dfrac{1}{(1+y)y^{p\lambda}}\mathrm{d}y$，$\int_0^\infty\dfrac{1}{(1+y)y^{q\lambda}}\mathrm{d}y$收敛，我们要求$0<\lambda<\min(\dfrac{1}{p},\dfrac{1}{q})$。设$F(\lambda)=\dfrac{1}{p}\log\sin(p\pi\lambda)+\dfrac{1}{q}\log\sin(q\pi\lambda)$，则$F'(\lambda)=\pi(\cot(p\pi\lambda)+\cot(q\pi\lambda))$是单调减函数，$p\pi\lambda+q\pi\lambda=\pi$时，$F'(\lambda)=0$，此时$F$取最大值，$\lambda=\dfrac{1}{p+q}$，$p\lambda=\dfrac{1}{q}$，$q\lambda=\dfrac{1}{p}$。代入⑥式，得②式成立。注：②式右边的常数$\dfrac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}$是最优的（所以①式右边的常数$\pi$也是最优的）。设$\epsilon$是一个小正数，满足$1+\epsilon<\min(p,q)$，$\dfrac{1}{p}-\dfrac{\epsilon}{q}>\dfrac{1}{2p}$。令$a_n=n^{-\frac{1+\epsilon}{p}}$，$b_n=n^{-\frac{1+\epsilon}{q}}$，则$\epsilon\to 0$时，有

$$\sum_{n\geq 1}a_n^p=\sum_{n\geq 1}b_n^q=\sum_{n\geq 1}n^{-1-\epsilon}\sim\int_1^\infty x^{-1-\epsilon}\mathrm{d}x=\frac{1}{\epsilon},$$

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n}=\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{(m+n)m^{\frac{1+\epsilon}{p}}n^{\frac{1+\epsilon}{q}}}\geq\iint_{[1,\infty)^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x+y)x^{\frac{1+\epsilon}{p}}y^{\frac{1+\epsilon}{q}}} \qquad (令y=ux)$$

$$= \int_1^\infty \int_{\frac{1}{x}}^\infty \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}(ux)}{x(1+u)x^{1+\epsilon}u^{\frac{1+\epsilon}{q}}} = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{1+\epsilon}} \int_{\frac{1}{x}}^\infty \frac{\mathrm{d}u}{(1+u)u^{\frac{1+\epsilon}{q}}}, \qquad ⑦$$

因为$0 < \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u)u^{\frac{1+\epsilon}{q}}} < \int_0^{\frac{1}{x}} u^{-\frac{1+\epsilon}{q}}\mathrm{d}u = \frac{1}{1-\frac{1+\epsilon}{q}}(\frac{1}{x})^{1-\frac{1+\epsilon}{q}} = \frac{1}{\frac{1}{p}-\frac{\epsilon}{q}}x^{-\frac{1}{p}+\frac{\epsilon}{q}}$，所以

$$⑦\text{式右边} \geq \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{1+\epsilon}}\left(\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{(1+u)u^{\frac{1+\epsilon}{q}}} - \frac{1}{\frac{1}{p}-\frac{\epsilon}{q}}x^{-\frac{1}{p}+\frac{\epsilon}{q}}\right)$$
$$= \frac{1}{\epsilon}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{(1+u)u^{\frac{1+\epsilon}{q}}} - O(1)\cdot\int_1^\infty x^{-1-\frac{1+\epsilon}{p}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\epsilon}\frac{\pi}{\sin(\pi\frac{1+\epsilon}{q})} - O(1), \qquad \epsilon \to 0\text{时},$$

所以$\lim_{\epsilon\to 0}(\sum_{m,n=1}^\infty \frac{a_m b_n}{m+n}\Big/[(\sum_{m=1}^\infty a_m^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{n=1}^\infty b_n^q)^{\frac{1}{q}}]) = \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{q})} = \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}$，②式右边的常数$\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}$是最优的。 □

例 0.1. 设$n \in \mathbb{Z}_+$，任取实数列$\{a_i\}_{1\leq i\leq n}$，正实数列$\{\lambda_i\}_{1\leq i\leq n}$，我们有

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{a_i a_j}{\lambda_i+\lambda_j} \geq 0 \quad ①, \quad \text{特别地，} \sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{a_i a_j}{i+j} \geq 0,$$

证. 运用算两次的方法，我们有

$$①\text{式左边} = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_i a_j \int_0^1 t^{\lambda_i+\lambda_j-1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{t}(\sum_{i=1}^n a_i t^{\lambda_i})^2\mathrm{d}t \geq 0,$$

□

例 0.2 (希尔伯特不等式证法一中的含参积分)**.** 我们证明$\int_0^\infty \frac{1}{(1+y)y^\lambda}\mathrm{d}y = \frac{\pi}{\sin(\pi\lambda)}$, $0<\lambda<1$, ①。

（1）回忆Γ函数在$\lambda > 0$时被定义为下述含参积分：$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty x^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$。求证：对$0<\lambda<1$，我们有

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+y)y^\lambda}\mathrm{d}y = \Gamma(\lambda)\Gamma(1-\lambda), \qquad ②$$

证. （1）下文中令$x = yt$, $u = \frac{1}{t}$，我们有

$$\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\lambda) = \iint_{\mathbb{R}_+^2} x^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-x}y^{-\lambda}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathbb{R}_+^2} (yt)^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-yt}y^{-\lambda}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}(yt)\mathrm{d}y$$
$$= \iint_{\mathbb{R}_+^2} y^{-1}t^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-y(t+1)}y\mathrm{d}t\mathrm{d}y = \int_0^\infty t^{\lambda-1}\mathrm{d}t\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y(t+1)}\mathrm{d}y = \int_0^\infty t^{\lambda-1}\frac{1}{t+1}\mathrm{d}t$$
$$= \int_\infty^0 u^{1-\lambda}\frac{1}{\frac{1}{u}+1}\mathrm{d}\frac{1}{u} = \int_0^\infty u^{1-\lambda}\frac{u}{u+1}u^{-2}\mathrm{d}u = \int_0^\infty \frac{1}{(u+1)u^\lambda}\mathrm{d}u,$$

所以②式得证。 □

（2）由Γ函数的欧拉反射公式$\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\lambda) = \frac{\pi}{\sin(\pi\lambda)}$，我们得到①式成立。（实话说，我不太喜欢这个证法，因为我们不会证欧拉反射公式，这要使用一些关于Γ函数的深奥知识。）

（3）我们在这里提供一个使用复分析的完整做法。设$y = e^x$, $R > 1$, $a = 1-\lambda \in (0,1)$，则①式左

边$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{ax}}{1+\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x=\lim_{R\to\infty}I_R$，其中设$I_R=\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{e}^{ax}}{1+\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x$。在复平面上，设$f(z)=\frac{\mathrm{e}^{az}}{1+\mathrm{e}^{z}}$，考察逆时针的长方形边界环路$C_R=\{x,\ -R\le x\le R\}\cup\{R+y\mathrm{i},\ 0\le y\le 2\pi\}\cup\{x+2\pi\mathrm{i},\ R\ge x\ge -R\}\cup\{-R+y\mathrm{i},\ 2\pi\ge y\ge 0\}$，设后面三段路径分别是$C_R^1,C_R^2,C_R^3$。因为$z\in\mathbb{C}$是$f(z)$的奇点当且仅当$1+e^z=0$，所以$f(z)$在$C_R$围成的区域内部只有一个奇点$z_1=\pi\mathrm{i}$。在$z_1$附近，$1+e^z=1-e^{z-z_1}=-(z-z_1)+O((z-z_1)^2)$，$f(z)=\mathrm{e}^{a\pi\mathrm{i}}(-\frac{1}{z-z_1}+O(1))$，所以$z_1$是$f(z)$的单极点。由留数定理，$\oint_{C_R}f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\mathrm{Res}(f,z_1)=2\pi i(-\mathrm{e}^{a\pi\mathrm{i}})$ ③。另一边，$z\in C_R^1$时，$|f(z)|\le\frac{\mathrm{e}^{aR}}{\mathrm{e}^{R}-1}\le\frac{\mathrm{e}^{aR}}{\mathrm{e}^{R}/2}=2\mathrm{e}^{(a-1)R}$，$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R^1}f(z)\mathrm{d}z=0$。同理，$z\in C_R^3$时，$|f(z)|\le\frac{\mathrm{e}^{-aR}}{1-\mathrm{e}^{-R}}\le\frac{\mathrm{e}^{-aR}}{1/2}=2\mathrm{e}^{-aR}$，$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R^3}f(z)\mathrm{d}z=0$。最后，$z\in C_R^2$时，$f(z)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}a}f(z-2\pi i)$，所以$\int_{C_R^2}f(z)\mathrm{d}z=-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}a}I_R$，③式左边$=(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}a})I_R+\int_{C_R^1}+\int_{C_R^3}f(z)\mathrm{d}z$。令$R\to\infty$，得$(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}a})\lim_{R\to\infty}I_R=2\pi i(-\mathrm{e}^{a\pi\mathrm{i}})$，$\lim_{R\to\infty}I_R=\frac{2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{a\pi\mathrm{i}}}{\mathrm{e}^{2a\pi\mathrm{i}}-1}=\frac{\pi}{\Im(\mathrm{e}^{a\pi\mathrm{i}})}=\frac{\pi}{\sin(\pi\lambda)}$，①式得证。

值得一提的是，本文题目中的三位数学家都可谓大名鼎鼎，著作等身，桃李满堂，是近代数学史上分量很重的大佬。文中属于他们的三个不等式在他们诸多辉煌的工作中几乎都只占很小的分量。