1 局部不等式

定理 1.1. 设函数$f(x)$在x_0的一个邻域$I=(x_0-\epsilon,x_0+\epsilon),\epsilon>0$上可导，且存在$A\in\mathbb{R}$使得

$$f(x)\geq A(x-x_0)+f(x_0),\quad x\in I,$$

恒成立，则必有$A=f'(x_0)$。

证. 法一：$x<x_0$时，有$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq A$，于是$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq A$；同理，$x>x_0$时，有$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq A$。所以$A=f'(x_0)$。

法二：设$g(x)=f(x)-A(x-x_0),x\in I$，则$g(x)$在$x=x_0$处取极小值，于是$0=g'(x_0)=f'(x_0)-A$，$A=f'(x_0)$。 □

例 1.1. （1）设$a,b,c\in\mathbb{R}_+$且$a^2+b^2+c^2=3$。求证：$\dfrac{1}{a^3+2}+\dfrac{1}{b^3+2}+\dfrac{1}{c^3+2}\geq 1$；
（2）设$x,y,z\in\mathbb{R}_+$且$x^4+y^4+z^4=1$。求$f=\dfrac{x^3}{1-x^8}+\dfrac{y^3}{1-y^8}+\dfrac{z^3}{1-z^8}$的最小值。

证. （1）设$f(x)=\dfrac{1}{x^3+2}$，则$f'(x)=\dfrac{-3x^2}{x^3+2}$，$f'(1)=-\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{\partial f}{\partial x^2}\big|_{x=1}=f'(1)\cdot\dfrac{\partial x}{\partial x^2}\big|_{x=1}=-\dfrac{1}{6}$。我们证明$x\geq 0$时，$f(x)\geq-\dfrac{1}{6}x^2+\dfrac{1}{2}$ ①，即$6\geq(3-x^2)(x^3+2)$，上式左边−右边$=x^5-3x^3+2x^2=x^2(x-1)^2(x+2)\geq 0$，所以①式成立。$f(a)+f(b)+f(c)\geq-\dfrac{1}{6}(a^2+b^2+c^2)+\dfrac{3}{2}=1$。
（2）设$a=x^4$，$g(a)=\dfrac{a^{3/4}}{1-a^2}$，则

$$g'(a)=\frac{\frac{3}{4}a^{-1/4}(1-a^2)+a^{3/4}\cdot 2a}{(1-a^2)^2}=\frac{3+5a^2}{4(1-a^2)^2a^{1/4}},$$
$$g'(\frac{1}{3})=\frac{3+5/9}{4\cdot(\frac{8}{9})^2}\cdot 3^{1/4}=\frac{9}{8}\cdot 3^{1/4},\quad g(\frac{1}{3})=\frac{3}{8}\cdot 3^{1/4},$$

我们证明

$$g(a)\geq\frac{9}{8}\cdot 3^{1/4}(a-\frac{1}{3})+\frac{3}{8}\cdot 3^{1/4}=\frac{9}{8}\cdot 3^{1/4}a,\qquad ②$$

即$1\geq\dfrac{9}{8}\cdot 3^{1/4}(1-a^2)a^{1/4}=\dfrac{9-t^2}{8}t^{1/4}$，其中$t=3a$。上式等价于$t^{9/4}-9t^{1/4}+8\geq 0$，由均值不等式知其成立。由②式，$f\geq\dfrac{9}{8}\cdot 3^{1/4}(x^4+y^4+z^4)=\dfrac{9}{8}\cdot 3^{1/4}$，$x=y=z=3^{-1/4}$时等号成立。所以$f$的最小值为$\dfrac{9}{8}\cdot 3^{1/4}$。 □

例 1.2. 设$a,b,c\geq 0$且$a+b+c=4$，求

$$S=\frac{1}{a^2-6a+16}+\frac{1}{b^2-6b+16}+\frac{1}{c^2-6c+16}\ \text{的最大值。}$$

解. 设$f(x)=\dfrac{1}{x^2-6x+16}$，则$f'(x)=\dfrac{-2x+6}{(x^2-6x+16)^2}$，$f'(2)=\dfrac{1}{32}$，$f(2)=\dfrac{1}{8}$，$f(0)=\dfrac{1}{16}$。我们证明$x\geq 0$时，$f(x)\leq\dfrac{1}{32}x+\dfrac{1}{16}$ ①，①式右边即$f(x)$在$x=2$处的切线，它也是$f(x)$过$(0,f(0))$和$(2,f(2))$两点的割线。①式$\iff(x+2)(x^2-6x+16)\geq 32$，上式左边−右边$=x^3-4x^2+4x=x(x-2)^2\geq 0$，所以①式

成立，$S=f(a)+f(b)+f(c)\le\frac{1}{32}(a+b+c)+\frac{3}{16}=\frac{5}{16}$，$a=0,b=c=2$时等号成立。所以$S$的最大值为$\frac{5}{16}$。 □

例 1.3. 求最大的常数k，使得对任意正实数x,y,z，都有

$$\frac{x}{y^2+z^2}+\frac{y}{z^2+x^2}+\frac{z}{x^2+y^2}\ge\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

解. 设$S=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sum\frac{x}{y^2+z^2}$，我们证明$S$的最小值为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$。因为将$(x,y,z)$同乘以任一正实数后$S$不变，所以可不妨设$x^2+y^2+z^2=3$，设$f(x)=\frac{x}{3-x^2}$，$f'(x)=\frac{3+x^2}{(3-x^2)^2}$，$f'(1)=1$，$\frac{\partial f}{\partial x^2}|_{x=1}=f'(1)\cdot\frac{\partial x}{\partial x^2}|_{x=1}=\frac{1}{2}$。我们证明$x\ge 0$时，$f(x)\ge\frac{x^2}{2}$ ①，即$x-\frac{x^2}{2}(3-x^2)=\frac{x}{2}(x^3-3x+2)=\frac{x}{2}(x-1)^2(x+2)\ge 0$。于是①式成立，$S=\sqrt{3}(f(x)+f(y)+f(z))\ge\sqrt{3}\cdot\frac{x^2+y^2+z^2}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$x=y=z=1$时上式等号成立。所以$S$的最小值为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$，最大的$k$为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$。 □

例 1.4. 设实数a,b,c满足$a+b+c=3$。求证：

$$\frac{1}{5a^2-4a+11}+\frac{1}{5b^2-4b+11}+\frac{1}{5c^2-4c+11}\le\frac{1}{4},$$

证. 设$f(x)=\frac{1}{5x^2-4x+11}$，$f'(x)=\frac{4-10x}{(5x^2-4x+11)^2}$，$f'(1)=-\frac{1}{24}$。我们证明$x\le\frac{9}{5}$时，$f(x)\le-\frac{1}{24}x+\frac{1}{8}$ ①，即$24\le(5x^2-4x+11)(3-x)$。上式左边$-$右边$=5x^3-19x^2+23x-9=(x-1)^2(5x-9)\le 0$，所以①式成立。不妨设$a\le b\le c$，（1）若$c\le\frac{9}{5}$，则$f(a)+f(b)+f(c)\le-\frac{1}{24}(a+b+c)+\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$；（2）若$c>\frac{9}{5}$，则$5c^2-4c+11>5\cdot(\frac{9}{5})^2-4\cdot\frac{9}{5}+11=20$，$5a^2-4a+11\ge 5\cdot(\frac{2}{5})^2-4\cdot\frac{2}{5}+11=\frac{51}{5}$，同理$5b^2-4b+11\ge\frac{51}{5}$，于是$f(a)+f(b)+f(c)\le\frac{5}{51}\cdot 2+\frac{1}{20}<\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{1}{4}$。综上所述，原不等式得证。 □

例 1.5. 设$x,y,z\ge 0$，且$x^2+y^2+z^2=1$。求证：$\frac{x}{1+yz}+\frac{y}{1+zx}+\frac{z}{1+xy}\ge 1$。

证. 观察到$x=1,y=z=0$时等号成立，以及

$$\frac{x}{1+yz}=\frac{x}{x^2+y^2+z^2+yz}\ge\frac{x}{x^2+\frac{3}{2}(y^2+z^2)}=\frac{2x}{3-x^2},$$

我们证明$\frac{2x}{3-x^2}\ge x^2$ ①。①式$\Longleftrightarrow 2\ge x(3-x^2)$，上式左边$-$右边$=x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)\ge 0$，①成立。所以$\frac{x}{1+yz}\ge\frac{2x}{3-x^2}\ge x^2$，同理，$\frac{y}{1+zx}\ge y^2$，$\frac{z}{1+xy}\ge z^2$，所以原式左边$\ge x^2+y^2+z^2=1$。 □

例 1.6. 设$x,y,z\ge 0$，求证：$\sqrt{\frac{x}{y+z}}+\sqrt{\frac{y}{z+x}}+\sqrt{\frac{z}{x+y}}\ge 2$。

证. x,y,z同时乘一个相同的正数不改变原式左右两边，所以可不妨设$x+y+z=2$。观察到$x=y=1,z=0$时等号成立。设$f(x)=\sqrt{\frac{x}{2-x}}$，则$f(0)=0,f(1)=1$，$f'(x)=f(x)(\frac{1}{2x}+\frac{1}{2(2-x)})$，$f'(1)=1$。我们证

明$f(x)\ge x$ ①，上式右边即为$f(x)$在$x=1$处的切线或过$(0,f(0)),(1,f(1))$两点的割线。

$$①式 \Longleftrightarrow 1\ge\sqrt{x(2-x)}\Longleftrightarrow 1-x(2-x)=(x-1)^2\ge 0,$$

①式得证，原式左边$=\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}+\sqrt{\dfrac{y}{2-y}}+\sqrt{\dfrac{z}{2-z}}\ge x+y+z=2$。 □

定理 1.2. 设$f:[a,b]\to\mathbb{R}$是区间$[a,b]$上的下凸函数，则$\max_{a\le x\le b}f(x)=\max\{f(a),f(b)\}$。

证. 设$x\in[a,b]$，则存在$\lambda,\mu\ge 0,\lambda+\mu=1$使得$x=\lambda a+\mu b$。设$M=\max\{f(a),f(b)\}$，于是

$$f(x)=f(\lambda a+\mu b)\le\lambda f(a)+\mu f(b)\le\lambda M+\mu M=M,$$

□

例 1.7. 设$0\le a,b,c\le 1$，求证：$\dfrac{a}{bc+1}+\dfrac{b}{ca+1}+\dfrac{c}{ab+1}\le 2$。

证. 法一：设$F(a,b,c)=\dfrac{a}{bc+1}+\dfrac{b}{ca+1}+\dfrac{c}{ab+1}$，则$b,c$固定时，$\dfrac{\partial^2F}{\partial a^2}=\dfrac{2bc^2}{ca+1}+\dfrac{2b^2c}{ab+1}\ge 0$，$F$是$a$的下凸函数。所以$F(a,b,c)\le\max\{F(0,b,c),F(1,b,c)\}$，同理，$F(a,b,c)\le\max\{F(a,0,c),F(a,1,c)\}$，$F(a,b,c)\le\max\{F(a,b,0),F(a,b,1)\}$。所以$F(a,b,c)\le\max\{F(0,0,0),F(1,0,0),F(1,1,0),F(1,1,1)\}=\max\{0,1,2,\frac{3}{2}\}=2$。

法二：我们证明$\dfrac{a}{bc+1}\le\dfrac{2a}{a+b+c}$ ①，即$2bc+2\ge a+b+c$。上式左边$-$右边$=bc+1-a+(1-b)(1-c)\ge 0$，所以①式成立。同理，$\dfrac{b}{ca+1}\le\dfrac{2b}{a+b+c}$，$\dfrac{c}{ab+1}\le\dfrac{2c}{a+b+c}$，三式相加即有$F(a,b,c)\le\dfrac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2$。 □

例 1.8. 非负实数a,b,c满足$a+b+c=3$，求证：$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\ge ab+bc+ac$ ①。

证. ①式$\Longleftrightarrow$ $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\ge\frac{9}{2}-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$ ②。我们证明$t\ge\dfrac{1}{4}$时，$\dfrac{1}{2}t^6+t\ge\dfrac{4}{3}t^3+\dfrac{1}{6}$ ③。因为$6\cdot$(③式左边$-$右边) $=3t^6-8t^3+6t-1=(t-1)^2(3t^4+6t^3+9t^2+4t-1)\ge 0$，所以③式成立。于是$x\ge\dfrac{1}{64}$时，$\sqrt[3]{x}\ge\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{2}x^2$ ④。不妨设$a\ge b\ge c$，（1）若$a,b,c\ge\frac{1}{64}$都成立，则由④式，②式左边$\ge\dfrac{4}{3}(a+b+c)+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$ =②式右边，②, ①式成立。（2）若$c\le\frac{1}{64}$，此时$\sqrt[3]{c}\ge 3c$，①式左边$\ge$ $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+3c=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+c^2+bc+ac$，只需证明$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\ge ab$ ⑤。设$u=\sqrt[6]{ab}$，则$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-ab\ge 2u-u^6=u(2-u^5)$ ⑥，由均值不等式：$u^5\le(\dfrac{a+b}{2})^{\frac{5}{3}}\le(\dfrac{3}{2})^{\frac{5}{3}}$，因为$8-(\dfrac{3}{2})^5=\dfrac{13}{32}>0$，所以$2-u^5\ge 2-(\dfrac{3}{2})^{\frac{5}{3}}\ge 0$，⑥式右边$\ge 0$，于是⑤, ①式成立。 □

例 1.9. 设$a,b,c,d>0$，$a+b+c+d=1$。求证：$6(a^3+b^3+c^3+d^3)\ge a^2+b^2+c^2+d^2+\dfrac{1}{8}$。

证. 只需证明$6a^3-a^2\ge\dfrac{5}{8}a-\dfrac{1}{8}$，这等价于$48a^3-8a^2-5a+1=(4a-1)^2(3a+1)\ge 0$。 □

例 1.10. 设$a,b,c>0$，证明：$\dfrac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\dfrac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\dfrac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$。

证. 不妨设$a+b+c=3$，只需证明$\dfrac{(a+3)^2}{3a^2-6a+9}\le\dfrac{4}{3}a+\dfrac{4}{3}$，这等价于 $4a^3-5a^2-2a+3=(a-1)^2(4a+3)\ge 0$。 □

例 1.11. 设$a,b,c>0$，证明：$\dfrac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2}+\dfrac{(c+a-b)^2}{b^2+(c+a)^2}+\dfrac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2}\ge\frac{3}{5}$。

证. 不妨设$a+b+c=3$，只需证明$\dfrac{(3-2a)^2}{2a^2-6a+9}\geq -\dfrac{18}{25}a+\dfrac{23}{25}$，这等价于 $25(3-2a)^2-(-18a+23)(2a^2-6a+9)=36a^3-54a^2+18=18(a-1)^2(2a+1)\geq 0$。 □

例 1.12. 设$a,b,c\in\mathbb{R}_+$，$a+b+c=3$。求证：$\sum\dfrac{1}{a\sqrt{2(a^2+bc)}}\geq\dfrac{9}{2(ab+bc+ca)}$。

证. □

例 1.13 (2009，塞尔维亚)**.** 设x,y,z为正实数，且$x+y+z=xy+yz+zx$。求证：$\dfrac{1}{x^2+y+1}+\dfrac{1}{y^2+z+1}+\dfrac{1}{z^2+x+1}\leq 1$ ①，并确定等号成立的条件。

证. 设$\sum x=\sum xy=s$，则$s=\sum xy\leq\dfrac{1}{3}(\sum x)^2=\dfrac{s^2}{3}$，$s\geq 3$。由柯西不等式，

$$\frac{1}{x^2+y+1}\leq\frac{1+y+z^2}{(x+y+z)^2},\qquad\frac{1}{y^2+z+1}\leq\frac{1+z+x^2}{(x+y+z)^2},\qquad\frac{1}{z^2+x+1}\leq\frac{1+x+y^2}{(x+y+z)^2},$$

所以①式左边$\leq\dfrac{3+\sum x+\sum x^2}{(x+y+z)^2}=\dfrac{3+\sum xy+\sum x^2}{\sum x^2+2\sum xy}\leq 1$。 □

例 1.14. 已知非负实数x,y,z满足$x^2+y^2+z^2=1$，求证：$\sqrt{(1-xy)(1-zx)}+\sqrt{(1-yz)(1-xy)}+\sqrt{(1-zx)(1-yz)}\geq 2$。

证. □

例 1.15. 设实数$a_1,a_2,...,a_n\in(-1,1]$，约定$a_{n+1}=a_1$。求证：$\sum_{i=1}^n\dfrac{1}{1+a_ia_{i+1}}\geq\sum_{i=1}^n\dfrac{1}{1+a_i^2}$。

证. □

例 1.16. 实数x,y,z满足$x,y,z\leq 1$且$x+y+z=1$。求证：$\dfrac{5}{2}\leq\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{y^2+1}+\dfrac{1}{z^2+1}\leq\dfrac{27}{10}$。

证. 右侧：只需证明$\dfrac{1}{x^2+1}\leq -\dfrac{27}{50}x+\dfrac{54}{50}$，这等价于 $-27x^3+54x^2-27x+4=(3x-1)^2(4-3x)\geq 0$ □

例 1.17. 设$x,y,z>0$，$x+y+z\geq 3$。求证：$\dfrac{1}{x^3+y+z}+\dfrac{1}{y^3+z+x}+\dfrac{1}{z^3+x+y}\leq\dfrac{3}{x+y+z}$。

证. 设$x'=\dfrac{3x}{x+y+z}$，$y'=\dfrac{3y}{x+y+z}$，$z'=\dfrac{3z}{x+y+z}$，则$x'+y'+z'=3$，且$x\geq x',y\geq y',z\geq z'$，只需证明$\dfrac{1}{x'^3+y'+z'}+\dfrac{1}{y'^3+z'+x'}+\dfrac{1}{z'^3+x'+y'}\leq 1$，即$\dfrac{1}{x'^3-x'+3}+\dfrac{1}{y'^3-y'+3}+\dfrac{1}{z'^3-z'+3}\leq 1$。运用切线法，我们试图证明 $\dfrac{1}{x'^3-x'+3}\leq -\dfrac{2}{9}x'+\dfrac{5}{9}$，这等价于$(-2x'+5)(x'^3-x'+3)-9=-2x'^4+5x'^3+2x'^2-11x'+6=(x'-1)^2(2x'+3)(2-x')\geq 0$。$x',y',z'\leq 2$时，上述不等式成立，原不等式也成立。否则不妨设$x'\geq 2$，$\dfrac{1}{x'^3-x'+3}\leq\dfrac{1}{9}$，$\dfrac{1}{y'^3-y'+3}$，$\dfrac{1}{z'^3-z'+3}\leq\dfrac{1}{3-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}}\leq\dfrac{4}{9}$，原不等式依然成立。 □

例 1.18. 设n个实数，它们的绝对值都小于等于2，其立方和为0。证明：它们的和$\leq\frac{2}{3}n$。

证. 设这些实数为$x_1,x_2,...,x_n,|x_i|\leq 2,\sum_{i=1}^n x_i^3=0$，只需证明$x_i\leq\dfrac{1}{3}x_i^3+\dfrac{2}{3}$，这等价于$x_{i^3}-3x_i+2=(x_i-1)^2(x_i+2)\geq 0$，上述不等式在$|x_i|\leq 2$时成立。 □

例 1.19. 已知正整数$n\geq 3$，$[-1,1]$中的实数$x_1,x_2,...,x_n$满足$\sum_{i=1}^n x_i^5=0$。求证：$\sum_{i=1}^n x_i\leq\frac{8}{15}n$。

证. 只需证明$x_i\le\dfrac{23}{15}x_i^5+\dfrac{8}{15}$，这等价于$23x_i^5-15x_i+8=(x_i+1)(23x_i^4-23x_i^3+23x_i^2-23x_i+8)=(x_i+1)(23x_{i^2}(x_i-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{69}{4}x_i^2-23x_i+8)\ge0$。 □

例 1.20. 有n个互异的实数$x_1,x_2,...,x_n$满足$\sum_{i=1}^n x_i=0$, $\sum_{i=1}^n x_i^2=1$。求证：存在$a,b,c,d\in\{x_1,x_2,...x_n\}$，使得$a+b+c+nabc\ge\sum_{i=1}^n x_i^3\ge a+b+d+nabd$。

证. 不妨设$x_1<x_2<...<x_n$，取$a=x_1,b=x_n,c=x_2,d=x_n-1$，$(x_i-a)(x_i-b)(x_i-c)=x_i^3-(a+b+c)x_i^2+(ab+bc+ca)x_i-abc\le0$，$(x_i-a)(x_i-b)(x_i-d)=x_i^3-(a+b+d)x_i^2+(ab+bd+da)x_i-abd\ge0$。 □

2 调和四边形

定义 2.1. 对边长度的乘积相等的圆内接四边形，称为调和四边形。

性质 2.1. 设四边形$ABCD$为调和四边形，M为AC中点，N为BD中点，则$\triangle ANB\backsim\triangle ADC\backsim\triangle BNC$，$\triangle AND\backsim\triangle ABC\backsim\triangle DNC$，$\triangle AMB\backsim\triangle DCB\backsim\triangle DMA$，$\triangle CMB\backsim\triangle DAB\backsim\triangle DMC$。

证. 由托勒密定理，$BN\cdot AC=\dfrac{1}{2}BD\cdot AC=\dfrac{1}{2}(AB\cdot CD+AD\cdot BC)=AB\cdot CD$，又因为$\angle ABN=\angle ACD$，所以$\triangle ANB\backsim\triangle ADC$。同理可证其余三角形相似。 □

例 2.1 (2011，高联A卷)**.** 四边形$ABCD$内接于$\odot O$，M,N分别为AC,BD的中点。若$\angle BMC=\angle DMC$，求证：$\angle AND=\angle CND$。

证. □

性质 2.2. 设P为圆ω外一点，PA,PC是ω的两条切线，切点分别为A,C，过P的一条ω的割线交ω于B,D两点，则四边形$ABCD$为调和四边形。

证. 因为$\triangle PAB\backsim\triangle PDA$, $\triangle PCB\backsim\triangle PDC$，所以$\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{PB}{PA}=\dfrac{PB}{PC}=\dfrac{CB}{CD}$，四边形$ABCD$是调和四边形。 □

性质 2.3. 设四边形$ABCD$为内接于圆ω的调和四边形，过A,C分别作ω的切线交于点P，则P,B,D三点共线。同理，过B,D分别作ω的切线交于点Q，则Q,A,C三点共线。

证. 法一：在$\triangle ACD$中，$\dfrac{\sin\angle ADB}{\sin\angle CDB}\cdot\dfrac{\sin\angle DCP}{\sin\angle ACP}\cdot\dfrac{\sin\angle CAP}{\sin\angle DAP}=\dfrac{AB}{BC}\cdot\dfrac{CD}{AD}=1$，由角元塞瓦定理，$AP,CP,DB$三线共点，所以$P,B,D$三点共线。

法二：在$\triangle APC$中考察点B，由角元塞瓦定理，

$$\frac{\sin\angle APB}{\sin\angle CPB}=\frac{\sin\angle PAB}{\sin\angle CAB}\cdot\frac{\sin\angle ACB}{\sin\angle PCB}=(\frac{\sin\angle ACB}{\sin\angle CAB})^2=(\frac{AB}{BC})^2,$$

$$\text{同理，考察点}D\text{，有}\frac{\sin\angle APD}{\sin\angle CPD}=(\frac{AD}{DC})^2=(\frac{AB}{BC})^2=\frac{\sin\angle APB}{\sin\angle CPB},$$

又因为$\angle APB+\angle CPB=\angle APD+\angle CPD=\angle APC\ne\pi$，所以$\angle APB=\angle APD$, $\angle CPB=\angle CPD$。于是P,B,D三点共线。

法三：在圆内接六边形$ACBACD$中，$\dfrac{AC}{CB}\cdot\dfrac{BA}{AC}\cdot\dfrac{CD}{DA}=1$，所以它的三条对角线$AA,CC,BD$，即$AP,CP,BD$交于一点，于是$P,B,D$三点共线。

法四：设PB交圆ω与D'点，由性质2，四边形$ABCD'$为调和四边形。所以

$$\frac{\sin\angle ABD}{\sin\angle CBD}=\frac{AD}{CD}=\frac{AB}{CB}=\frac{AD'}{CD'}=\frac{\sin\angle ABD'}{\sin\angle CBD'},$$

又因为$\angle ABD+\angle CBD=\angle ABD'+\angle CBD'=\angle ABC\neq\pi$，所以$\angle ABD=\angle ABD'$，$\angle CBD=\angle CBD'$，$D,D'$两点重合，$P,B,D$三点共线。 □

例 2.2 (2024，高联预赛广东)**.** AB为圆O的一条弦（$AB<\sqrt{3}R$，R为圆O的半径），C为优弧AB的中点，M为弦AB的中点，点D,E,N分别在BC,CA和劣弧AB上，满足$BD=CE$，且AD,BE,CN三线共点于F。延长CN至G，使$GN=FN$。求证：$\angle FMB=\angle GMB$。

证. 法一：设$\triangle ABF$的外接圆为ω，因为$\angle CAF=\angle ABF$, $\angle CBF=\angle BAF$，所以CA,CB均与ω相切。

$$\frac{\sin\angle BFM}{\sin\angle AFM}=\frac{AF}{BF}=\frac{\sin\angle ABF}{\sin\angle BAF},\qquad ①$$
$$\frac{\sin\angle AFN}{\sin\angle BFN}=\frac{\sin\angle AFC}{\sin\angle BFC}=\frac{\sin\angle CAF}{\sin\angle CBF}\cdot\frac{AC}{CF}\cdot\frac{CF}{BC}=\frac{\sin\angle CAF}{\sin\angle CBF}=\text{①式右边},$$

又因为$\angle BFM+\angle AFM=\angle AFN+\angle BFN=\angle AFB\neq\pi$，所以$\angle BFM=\angle AFN$, $\angle AFM=\angle BFN$。

$$FN=\frac{AF\cdot FD}{CF},\qquad \frac{2FM}{BF}=\frac{\sin\angle(\pi-\angle AFB)}{\sin\angle AFM}=\frac{\sin\angle BFD}{\sin\angle BFN}=\frac{\sin\angle CDF}{\sin\angle DCF}=\frac{CF}{DF},$$

所以$2FN\cdot FM=\dfrac{AF\cdot FD}{CF}\cdot\dfrac{BF\cdot CF}{DF}=AF\cdot BF$，于是$\dfrac{FG}{AF}=\dfrac{BF}{FM}$, $\triangle AFG\backsim\triangle MFB$。所以$\angle AGF=\angle MBF$, A,F,B,G四点共圆。CFG是圆ω的割线，由性质2，四边形$AFBG$是调和四边形。由性质1，$\triangle MFB\backsim\triangle AFG\backsim\triangle MBG$, $\angle FMB=\angle GMB$。

法二：设CN交圆ω于G'，则$\angle FNB=\angle CAB=\angle AG'B$，又因为$\angle BFN=\angle BAG'$，所以$\triangle FNB\backsim\triangle AG'B$。由性质2，四边形$AFBG'$为调和四边形，所以由托勒密定理，

$$FN\cdot AB=FB\cdot AG'=\frac{1}{2}(FB\cdot AG'+AF\cdot BG')=\frac{1}{2}FG'\cdot AB,\qquad FG'=2FN,$$

于是G,G'重合。由性质1，$\triangle FMB\backsim\triangle BMG$, $\angle FMB=\angle GMB$。 □

性质 2.4. 设四边形$ABCD$为内接于圆ω的调和四边形，P为ω上任意一点，则PA,PB,PC,PD为调和线束，即$\dfrac{\sin\angle APB}{\sin\angle CPB}=\dfrac{\sin\angle APD}{\sin\angle CPD}$。

定义 2.2. 三角形中线的等角线称为三角形的陪位中线。

性质 2.5. 设四边形$ABCD$为调和四边形，对角线AC,BD交于点Q，则DQ为$\triangle ACD$的陪位中线，BQ为$\triangle ABC$的陪位中线，CQ为$\triangle BCD$的陪位中线，AQ为$\triangle ABD$的陪位中线。

例 2.3. $\triangle ABC$的内切圆$\odot I$分别与边CA,AB切于点E,F，BE,CF分别与$\odot I$交于点M,N。求证：$MN\cdot EF=3MF\cdot NE$。

证. □

例 2.4. O为锐角$\triangle ABC$的外心，$AB<AC$，Q为$\angle BAC$的外角平分线与BC的交点，点P在$\triangle ABC$的内部，$\triangle BPA\backsim\triangle APC$。求证：$\angle QPA+\angle OQB=\dfrac{\pi}{2}$。

证. 作A关于P的对称点D，则$\angle BPD=\angle BAP+\angle ABP=\angle BAP+\angle CAP=\angle BAC$。又因为$\dfrac{PD}{PB}=\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{AC}{AB}$，所以$\triangle BPD\backsim\triangle BAC$，同理，$\triangle BAC\backsim\triangle DPC$。所以$\angle BDP=\angle BCA$，$A,B,C,D$四点共圆。我们还得到$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{BP}{PD}=\dfrac{BP}{PA}=\dfrac{AB}{AC}$ ①，所以四边形$ABCD$是调和四边形。设$\angle BAC$的平分线交BC于点R，则$\angle QAR=\dfrac{\pi}{2}$，$A$在以$QR$为直径的圆上。设它的圆心为$O'$，则$O'$是$QR$中点。由角平

分线定理及①式，$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{BR}{RC}=\frac{QB}{QC}$，所以$D$在阿氏圆$\odot O'$上。阿氏圆中$P$是弦$AD$的中点，所以$O'P\perp AD$，$O,P,O'$三点共线。因为$Q,R;B,C$是调和点列，所以$O'O^2-R^2=O'B\cdot O'C=O'R^2=O'A^2$，其中$R$为$\odot O$的半径。由勾股定理，$O'A\perp AO$，$O'P\cdot O'O=O'A^2=O'Q^2$，所以$\triangle PO'Q\backsim\triangle QO'O$，$\angle OQB=\angle O'PQ=\frac{\pi}{2}-\angle QPA$。注：可以设$J,K$分别为$AB,AC$的中点，则$A,J,O,K$四点共圆，$\angle AJP=\pi-\angle BJP=\pi-\angle AKP$，$A,J,P,K$四点共圆，所以$A,J,K,O,P$五点共圆。 □

例 2.5 (2013，亚太数学奥林匹克)**.** PB,PD为$\odot O$的切线，PCA为$\odot O$的割线，C关于$\odot O$的切线分别与PD,AD交于点Q,R。AQ与$\odot O$的另一个交点为E。求证：B,E,R三点共线。

分析：本题图中有$ABCD$和$ACED$两个调和四边形。B,E,R三点共线等价于AD,BE,CQ三线共点。

证. 四边形$ABCD$, $ACED$均为调和四边形，$AB\cdot CD=AD\cdot BC$, $AC\cdot DE=AD\cdot CE$。于是在$\triangle ACE$中，

$$\frac{\sin\angle CEB}{\sin\angle AEB}\cdot\frac{\sin\angle EAD}{\sin\angle CAD}\cdot\frac{\sin\angle ACQ}{\sin\angle ECQ}=\frac{BC}{AB}\cdot\frac{DE}{CD}\cdot\frac{AC}{CE}=\frac{DE}{AD}\cdot\frac{AC}{CE}=1,$$

由角元塞瓦定理，AD,BE,CQ三线共点，所以B,E,R三点共线。

法二：由托勒密定理，$AC\cdot BD=2BC\cdot AD$, $AE\cdot CD=2AD\cdot CE$。在$\triangle ABC$中，

$$\frac{\sin\angle CBE}{\sin\angle ABE}\cdot\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}\cdot\frac{\sin\angle ACQ}{\sin\angle BCQ}=\frac{CE}{AE}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{AC}{BC}=\frac{CE}{AE}\cdot\frac{2AD}{CD}=1$$

由角元塞瓦定理，AD,BE,CQ三线共点，所以B,E,R三点共线。

□

例 2.6. 在$\triangle ABC$中，M为BC的中点，以AM为直径的圆分别与AC,AB交于点E,F，过点E,F作以AM为直径的圆的切线，交点为P。求证：$PM\perp BC$。

证. 由角元塞瓦定理，$\frac{\sin\angle PME}{\sin\angle PMF}=\frac{\sin\angle PEM}{\sin\angle PEF}\cdot\frac{\sin\angle PFE}{\sin\angle PFM}=\frac{\sin\angle MAE}{\sin\angle MAF}=\frac{c}{b}=\frac{\sin(\pi-C)}{\sin(\pi-B)}$。又因为$\angle PME+\angle PMF=2\pi-\angle EMF=(\pi-B)+(\pi-C)\neq\pi$，所以$\angle PME=\pi-C,\angle PMF=\pi-B$, $\angle PMC=\angle PME-\angle CME=\pi-C-(\frac{\pi}{2}-C)=\frac{\pi}{2}$, $PM\perp BC$。

法二：因为$ME\perp AC$, $MF\perp AB$，所以$BF=\frac{a}{2}\cos B$, $CE=\frac{a}{2}\cos C$。过M作BC的垂线l，设它分别交EP,FP于点P_1,P_2。设$\angle MEP=\angle MAE=\alpha$，则$\angle EMP_1=\angle EMC+\frac{\pi}{2}=\pi-C$, $\angle MPE=\pi-\alpha-(\pi-C)=C-\alpha$, $MP_1=ME\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(C-\alpha)}=\frac{a}{2}\sin C\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(C-\alpha)}$。因为$\cot\alpha=\frac{AE}{ME}=\frac{b-\frac{a}{2}\cos C}{\frac{a}{2}\sin C}=\frac{2b}{a\sin C}-\cot C$，所以$\frac{\sin(C-\alpha)}{\sin C\sin\alpha}=\cot\alpha-\cot C=\frac{2b}{a\sin C}-2\cot C=\frac{2\sin B-2\sin A\cos C}{\sin A\sin C}=2\cot A$，于是$MP_1=\frac{a}{4\cot A}$，同理$MP_2=\frac{a}{4\cot A}=MP_1$，$P,P_1,P_2$重合，所以$MP\perp BC$。 □

例 2.7. 在$\triangle ABC$中，$AB<AC$，A关于点B的对称点为D，CD的中垂线与$\triangle ABC$的外接圆$\odot O$交于点E,F，AE,AF分别与BC交于点U,V。求证：B为UV中点。

分析：我们先给一个用三角法硬算的证明，其中把$\angle EAB,\angle FAB$设为参数来表示E,F两点的位置，并把$EC=ED$, $FC=FD$视为关于$\angle EAB,\angle FAB$的方程。该证法思路简单直接，但在这道题上计算量显得太大。再给一个巧妙使用调和线束和调和四边形性质的证明。

证. 法一（三角法）：设$\alpha = \angle EAB$，$\beta = \angle FAB$，则$\dfrac{BF}{BE} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$。要证$UB = BV$，即$1 = \dfrac{UB}{BV} = \dfrac{AU\sin\angle UAB}{AV\sin\angle VAB} = \dfrac{\sin\angle AVU}{\sin\angle AUV}\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ ①。因为$\angle AVU = \pi - B - \beta$，$\angle AUV = B - \alpha$，所以

$$①式右边 = \frac{\sin(B+\beta)}{\sin(B-\alpha)}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \qquad ①式 \Longleftrightarrow \frac{\sin(B+\beta)}{\sin\beta} = \frac{\sin(B-\alpha)}{\sin\alpha},$$

$$即\ \sin B\cot\beta + \cos B = \sin B\cot\alpha - \cos B \Longleftrightarrow \cot\alpha - \cot\beta = 2\cot B, \qquad ②$$

设$C' = \angle BCD$，则$\tan C' = \dfrac{BD\sin B}{BC + BD\cos B} = \dfrac{\sin B\sin C}{\sin A + \sin C\cos B}$ ③。因为E在CD中垂线上，所以

$$CE\cos\angle ECD = \frac{CD}{2}, \qquad 2R\sin(A+\alpha)\cos(\alpha + C') = \frac{c\sin B}{2\sin C'},$$

$$\sin(2\alpha + A + C') + \sin(A - C') = \frac{\sin B\sin C}{\sin C'}, \qquad ④$$

$$同理，\ \sin(-2\beta + A + C') + \sin(A - C') = \frac{\sin B\sin C}{\sin C'},$$

设$t = \cot\alpha$，则$\sin 2\alpha = \dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos 2\alpha = \dfrac{t^2-1}{1+t^2}$。由④式，

$$2t\cos(A+C') + (t^2-1)\sin(A+C') + (1+t^2)\sin(A-C') = (1+t^2)\cdot\frac{\sin B\sin C}{\sin C'},$$

$$t^2\left(\sin(A+C') + \sin(A-C') - \frac{\sin B\sin C}{\sin C'}\right) + 2t\cos(A+C') - \sin(A+C') + \sin(A-C') - \frac{\sin B\sin C}{\sin C'}$$

$$= t^2\left(2\sin A\cos C' - \frac{\sin B\sin C}{\sin C'}\right) + 2t\cos(A+C') - 2\sin C'\cos A - \frac{\sin B\sin C}{\sin C'} = 0, \qquad ⑤$$

同理，$t = -\cot\beta$也满足⑤式，$t = \cot\alpha$，$-\cot\beta$是⑤式的两根。于是

$$②式左边 = -\frac{2\cos(A+C')}{2\sin A\cos C' - \dfrac{\sin B\sin C}{\sin C'}}, \qquad ②式 \Longleftrightarrow$$

$$-\cos(A+C') = \cot B\left(2\sin A\cos C' - \frac{\sin B\sin C}{\sin C'}\right) \Longleftrightarrow \sin A\sin C' - \cos A\cos C'$$

$$= 2\cot B\sin A\cos C' - sinC'\cos B\sin C - \cos C'\cos B\sin C\cot C, \qquad ⑥$$

由③式，$\sin C'(\sin A + \sin C\cos B) = \sin B\sin C\cos C'$。于是

$$⑥式 \Longleftrightarrow \sin B\sin C - \cos A = 2\cot B\sin A - \cos B\sin C\cot C', \qquad ⑦$$

$$⑦式右边 = 2\cot B\sin A - (\sin A + \sin C\cos B)\cot B = \cot B(\sin A - \sin C\cos B) = \cos B\cos C,$$

又因为⑦式左边$= \cos B\cos C$，所以⑦, ⑥, ②, ①式成立，$UB = BV$得证。

法二：设过A作BC的平行线交$\odot O$于A'点，分别过B, A'两点作$\odot O$的两条切线交于P点，我们证明$PC = PD$ ①。$\angle PBC = \pi - A$，$\angle PBD = \pi - C$，$PB = PA' = \dfrac{A'B}{2\cos\angle PBA'} = \dfrac{b}{2\cos B}$，

$$PC^2 = PB^2 + a^2 - 2a\cdot PB\cos\angle PBC = PB^2 + a^2 + \frac{ab}{\cos B}\cos A,$$

$$PD^2 = PB^2 + c^2 - 2c\cdot PB\cos\angle PBD = PB^2 + c^2 + \frac{bc}{\cos B}\cos C,$$

所以①式$\Longleftrightarrow a^2+\dfrac{ab}{\cos B}\cos A=c^2+\dfrac{bc}{\cos B}\cos C\Longleftrightarrow(a^2-c^2)\cos B=bc\cos C-ab\cos A\Longleftrightarrow$

$$(\sin^2 A-\sin^2 C)\cos B=\sin B(\sin C\cos C-\sin A\cos A),\qquad ②,$$

因为$\sin^2 A-\sin^2 C=\sin B\sin(A-C)$，$\sin C\cos C-\sin A\cos A=\dfrac{1}{2}(\sin 2C-\sin 2A)=\sin(C-A)\cos(C+A)=\sin(A-C)\cos B$，所以②式成立，①式成立。于是$P$在$CD$的中垂线上，$P,E,F$三点共线。由性质2知四边形$EBFA'$是调和四边形，由性质4知$AE,AF;AB,AA'$是调和线束。因为$AA'/\!/BC$，所以由调和线束的性质知$UB=BV$。 □

例 2.8. 已知$\triangle ABC$内接于$\odot O$，三条高线AD,BE,CF交于H，过点B,C作$\odot O$的切线交于点P，PD与EF交于点K，M为BC的中点。求证：K,H,M三点共线。

证. 设PB,PC分别交直线EF于点Q,R，则$\angle QBF=C=\angle AFE=\angle QFB$，同理$\angle RCE=\angle REC=B$，$\angle PQR=\pi-2C$，$\angle PRQ=\pi-2B$。$\dfrac{QK}{KR}=\dfrac{PQ}{PR}\cdot\dfrac{\sin\angle BPD}{\sin\angle CPD}=\dfrac{\sin 2B}{\sin 2C}\cdot\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{\sin B\cos B}{\sin C\cos C}\cdot\dfrac{c\cos B}{b\cos C}=\dfrac{\cos^2 B}{\cos^2 C}$。另一边，$QF=\dfrac{BF}{2\cos C}=\dfrac{a\cos B}{2\cos C}$，同理，$RE=\dfrac{a\cos C}{2\cos B}$，于是

$$\frac{QF}{ER}=\frac{\cos^2 B}{\cos^2 C}=\frac{QK}{KR}=\frac{QK-QF}{KR-ER}=\frac{FK}{KE},\qquad \frac{HE}{HF}=\frac{\sin\angle HFE}{\sin\angle HEF}=\frac{\cos C}{\cos B},$$
$$\frac{\sin\angle FHK}{\sin\angle EHK}=\frac{FK\cdot HE}{EK\cdot FH}=\frac{\cos^2 B\cos C}{\cos^2 C\cos B}=\frac{\cos B}{\cos C}=\frac{\sin\angle BCH}{\sin\angle CBH}=\frac{BH}{CH}=\frac{\sin\angle CHM}{\sin\angle BHM},$$

又因为$\angle FHK+\angle EHK=\angle CHM+\angle BHM=\angle BHC\neq\pi$，所以$\angle FHK=\angle CHM$，$\angle EHK=\angle BHM$，$K,H,M$三点共线。 □

例 2.9 (2012，亚太数学奥林匹克)**.** 已知锐角$\triangle ABC$内接于$\odot O$，H为垂心，AH与BC交于点D，M为边BC的中点，延长MH，与$\odot O$交于点E，延长ED，与$\odot O$交于点F。求证；四边形$ABFC$为调和四边形。

证. 设K为H关于M的对称点，则$\angle BKC=\angle BHC=\pi-A$，$K$也在$\odot O$上。于是

$$\frac{BE}{BM}=\frac{KC}{KM}=\frac{HB}{HM},\qquad BE=\frac{a}{2}\cdot\frac{HB}{HM},\qquad CE=\frac{a}{2}\cdot\frac{HC}{HM},\qquad \frac{HC}{HB}=\frac{\sin\angle HBC}{\sin\angle HCB}=\frac{\cos C}{\cos B},$$
$$\frac{BF}{FC}=\frac{\sin\angle BED}{\sin\angle CED}=\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{BE}=\frac{c\cos B}{b\cos C}\cdot\frac{HC}{HB}=\frac{c}{b}=\frac{AB}{AC},$$

所以四边形$ABFC$是调和四边形。 □

例 2.10 (2011，哈萨克斯坦)**.** 已知钝角$\triangle ABC$内接于$\odot O$，$\angle C>\frac{\pi}{2}$，C'为C关于AB的对称点，AC'与$\odot O$交于点E，BC'与$\odot O$交于点F，M为AB的中点，MC'与$\odot O$交于点N（点C'在M与N之间），K为EF的中点。求证：AB,CN,KC'三线共点。

证. 因为$\triangle ACB\cong\triangle AC'B\backsim\triangle FC'E$，$M,K$分别是对应边$AB,FE$的中点，所以$\angle KC'E=\angle MCB$　①。设C关于OM的对称点为C_1，因为$\angle BMC_1=\angle AMC=\angle AMC'$，所以$C_1,M,C',N$四点共线，$\triangle AMC\cong\triangle BMC_1\backsim\triangle AMN$。于是$BM^2=AM^2=MC\cdot MN$，又因为$\angle CMB=\angle BMN$，所以$\triangle CMB\backsim\triangle BMN$，$\angle MCB=\angle MBN=\angle ACN$。注：本题中四边形$ACBN$是调和四边形。 □

例 2.11. 已知凸四边形$ABCD$内接于圆，AD,BC的延长线交于点E，对角线AC与BD交于点F，M为CD的中点，N为$\triangle ABM$的外接圆上不同于M的点，且满足$\dfrac{AN}{BN}=\dfrac{AM}{BM}$。求证：$E,F,N$三点共线。

证. □

例 2.12 (2010，伊朗)**.** 已知锐角$\triangle ABC$内接于$\odot O$，$\angle C=\dfrac{\pi}{4}$，AD为高线，点X在线段AD内部，且满足$\angle XBC=\dfrac{\pi}{2}-\angle B$，$AD,CX$分别与$\odot O$交于点$M,N$，过$M$关于$\odot O$的切线与$AN$交于点$P$。求证：$P,B,O$三点共线。

证. □

例 2.13. 已知锐角$\triangle ABC$内接于$\odot O$，H为垂心，M为BC的中点，点U在BC上，且满足$\angle BAM=\angle CAU$，K为点H在过点A关于$\odot O$的切线上的射影，L为点H在AU上的射影。求证：K,L,M三点共线。

证. □

3 解析几何-1

例 3.1 (2023，北京高考)**.** 已知椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{5}}{3}$，$A,C$分别是$E$的上、下顶点，$B,D$分别是$E$的左、右顶点，$|AC|=4$。（1）求$E$的方程；（2）设$P$为第一象限内$E$上的动点，直线$PD$与直线$BC$交于点$M$，直线$AP$与直线$y=-2$交于点$N$，求证：$MN /\!/ CD$。

证. □

例 3.2. 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,(a>b>0)$的左、右顶点分别为$A_1,A_2$，$D(\sqrt{6},1)$为椭圆$C$上一点，$P,Q$为椭圆$C$上异于$A_1,A_2$的两点，且直线$PQ$不与坐标轴平行，点$P$关于原点$O$的对称点为$S$，$\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{DS}$的最大值为4。（1）求椭圆$C$的标准方程；（2）若直线$A_1S$与直线$A_2Q$相交于点$T$，直线$OT$与直线$PQ$相交于点$R$。求证：在椭圆$C$上存在定点$E$，使得$\triangle RDE$的面积为定值，并求出该定值。

证. □

例 3.3. 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,(a>b>0)$的两个焦点分别为$F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(\sqrt{3},0)$，且椭圆与直线$y=x+\sqrt{5}$相切。（1）求椭圆的方程；（2）设椭圆的左右顶点分别为A_1,A_2，若直线$l:x=t(t>a)$与x轴交于T点，点M为直线l上异于T的任意一点，直线MA_1,MA_2分别与椭圆交于P,Q两点，连结PA_2的直线与l交于N点。是否存在t，使得直线PQ与以MN为直径的圆总相切？若存在，求出t；若不存在，请说明理由。

解. （1）设椭圆与$y=x+\sqrt{5}$的切点为$R(x_0,y_0)$，则$-\dfrac{x}{\sqrt{5}}+\dfrac{y}{\sqrt{5}}=1$与$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$是同一直线。所以$x_0=-\dfrac{a^2}{\sqrt{5}}$，$y_0=\dfrac{b^2}{\sqrt{5}}$，$1=\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=\dfrac{a^2+b^2}{5}$。又因为$a^2-b^2=3$，所以$a^2=4$，$b^2=1$，椭圆方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$。

（2）设$P(2\cos\theta,\sin\theta)$，$Q(2\cos\xi,\sin\xi)$，则 □

例 3.4 (2022，高联A卷)**.** 在平面直角坐标系中，双曲线$\Gamma:\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$。对平面内不在$\Gamma$上的任意一点$P$，记$\Omega_P$为过点$P$且与$\Gamma$有两个交点的直线的全体。对任意直线$l\in\Omega_P$，记$M,N$为$l$与$\Gamma$的两个交点，定义$f_P(l)=|PM|\cdot|PN|$。若存在一条直线$l_0\in\Omega_P$满足：$l_0$与$\Gamma$的两个交点位于$y$轴两侧，且对任意直线$l\in\Omega_P$，$l\neq l_0$，均有$f_P(l)>f_P(l_0)$，则称$P$为“好点”。求所有好点所构成的区域的面积。

解. 若直线l不平行于y轴，设$l:y=kx+b$，与$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$联立，得

$$\frac{x^2}{3}-(kx+b)^2=1,\qquad x^2(k^2-\frac{1}{3})+2bkx+b^2+1=0\quad ①,$$

$$\frac{\Delta}{4} = k^2b^2 - (k^2 - \frac{1}{3})(b^2+1) = \frac{b^2+1}{3} - k^2,$$

方程①有两个不同实根$\Longleftrightarrow \dfrac{\Delta}{4} = \dfrac{b^2+1}{3} - k^2 > 0 \quad$②。若$l \in \Omega_P$，$l$与$\Gamma$交于$M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$，则

$$\begin{aligned} f_P(l) = PM \cdot PN &= (k^2+1)|(x_P - x_1)(x_P - x_2)| = (k^2+1)|x_P^2 - x_P(x_1+x_2) + x_1x_2| \\ &= \frac{k^2+1}{|k^2 - \frac{1}{3}|} \cdot |x_P^2(k^2 - \frac{1}{3}) + 2k(y_P - kx_P)x_P + (y_P - kx_P)^2 + 1| = \frac{k^2+1}{|k^2-\frac{1}{3}|} \cdot |-\frac{x_P^2}{3} + y_P^2 + 1|, \end{aligned}$$

这里用到$x_P^2(k^2 - \frac{1}{3}) + 2kbx_P + b^2 + 1 = (k^2 - \frac{1}{3})(x_P - x_1)(x_P - x_2)$，以及$b = y_P - kx_P$。$P$为定点时，因为$P$不在$\Gamma$上，所以$|-\frac{x_P^2}{3} + y_P^2 + 1|$取非零定值。于是$f_P(l)$取最小值 $\Longleftrightarrow \dfrac{k^2+1}{|k^2 - \frac{1}{3}|}$取最小值，$M, N$位于$y$轴两侧$\Longleftrightarrow x_1x_2 = \dfrac{b^2+1}{k^2 - \frac{1}{3}} < 0 \Longleftrightarrow |k| < \frac{1}{\sqrt{3}}$。 □

例 3.5 (2016，高联A卷)**.** 在平面直角坐标系xOy中，F是x轴正半轴上的一个动点，以F为焦点、O为顶点作抛物线C。设P是第一象限内C上的一点，Q是x轴负半轴上一点，使得PQ为C的切线，且$|PQ| = 2$。圆C_1, C_2均与直线OP相切于点P，且均于x轴相切。求点F的坐标，使圆C_1, C_2的面积之和取最小值。

解. 设$F(\dfrac{p}{2}, 0)$, $p > 0$，则C的方程为$y^2 = 2px$，C过P的切线为$y_Py = p(x + x_P)$，Q的坐标为$(-x_P, 0)$，所以$4 = PQ^2 = 4x_P^2 + y_P^2 = 4x_P^2 + 2px_P$, $x_P^2 + \dfrac{p}{2}x_P - 1 = 0 \quad$①。 □

4 数论选讲

例 4.1. 设n为正整数，求证：$2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$至少有$n$个不同的素因子。

证. □

例 4.2. 设n为正整数，p是素数，若整数a, b, c满足$a^n + pb = b^n + pc = c^n + pa$，求证：$a = b = c$。

证. □

例 4.3. 设正整数a, b, c满足方程$c^2 = a^2 + b^2 + ab$，且$(a, b) = 1$。求证：存在正整数x, y, $(x, y) = 1$, $x > y$，使得$c = x^2 + y^2 + xy$，$a = 2xy + y^2$, $b = x^2 - y^2$或$a = x^2 - y^2$, $b = 2xy + y^2$。

分析：先给一个只在整数环上解不定方程的证明，我们将原方程配方，转化为和勾股方程类似的形式。再给一个在有理数域上解二次方程的证明，这里使用了解析几何的直观想法。

证. 因为$(a, b) = 1$，所以a, b中必有一奇数。不妨设$2 \nmid b$，则

$$4c^2 = (2a+b)^2 + 3b^2, \qquad 3b^2 = (2c+2a+b)(2c-2a-b), \qquad ①$$
$$(2c+2a+b, 2c-2a-b) = (2c+2a+b, 4c) = (2c+2a+b, c) = (2a+b, c),$$

若存在素数p, $p \mid (2a+b, c)$，则$p^2 \mid 3b^2 = 4c^2 - (2a+b)^2$, $p \mid b$, $p \mid a^2 = c^2 - b^2 - ab$, $p \mid a$, $p \mid (a, b)$，矛盾！所以$(2a+b, c) = 1$。①式中，(i)若$3 \mid 2c + 2a + b$，则存在$u, v \in \mathbb{Z}_+$, $2 \nmid u, v$, $(u, v) = 1$，使得$2c + 2a + b = 3u^2$, $2c - 2a - b = v^2$。所以$c = \dfrac{3u^2+v^2}{4}$, $b = uv$, $2a + b = \dfrac{3u^2 - v^2}{2}$，解得$a = \dfrac{3u^2 - 2uv - v^2}{4} = \dfrac{(u-v)(3u+v)}{4}$。因为$a > 0$，所以$u > v$，设$x = \dfrac{u+v}{2}$, $y = \dfrac{u-v}{2}$，则$x, y \in \mathbb{Z}_+$，x, y一奇一偶且$(x, y) = 1$, $x > y$，$u = x + y$, $v = x - y$, $c = x^2 + y^2 + xy$, $b = x^2 - y^2$, $z = 2xy + y^2$。

法二：若存在素数p，使得$p \mid (a,c)$，则$p \mid b^2 = c^2 - a^2 - ab$，$p \mid b$，$p \mid (a,b)$，矛盾！同理，$(b,c)=1$。设$x = \dfrac{a}{c}$，$y = \dfrac{b}{c}$，则$x^2+y^2+xy=1$。设$y=k(x+1)$，$k \in \mathbb{Q}$，则$k>0$，$0 = x^2+k^2(x+1)^2+kx(x+1)-1 = (x+1)(x-1+k^2(x+1)+kx) = (x+1)((k^2+k+1)x+k^2-1)$，$x = \dfrac{1-k^2}{k^2+k+1}$。因为$x>0$，所以$0<k<1$，$y = k(x+1) = \dfrac{k(k+2)}{k^2+k+1}$。 □

例 4.4. 设$f(n) = 1+n+n^2+...+n^{2010}$，求证：对任意正整数$m$，若$2 \le m \le 2010$，则不存在整数$n$，使得$m|f(n)$　①。

证. 我们证明对任意满足$2 \le p \le 2010$的素数p，都不存在$n \in \mathbb{Z}$，使得$p \mid f(n)$　②。$p=2$时，无论n是奇数还是偶数，都有$2 \nmid f(n)$。$p \ge 3$时，假设$p \mid f(n) = \dfrac{n^{2011}-1}{n-1}$，则$n^{2011} \equiv 1 \pmod p$，$p \nmid n$。由费马小定理，$n^{p-1} \equiv 1 \pmod p$。设$n$模$p$的阶为$r$，因为2011是素数，所以$r \mid (2011, p-1) = 1$，$r=1$，$n \equiv 1 \pmod p$。因为$p \nmid n, 1$，$p \mid n-1$，$p$为奇素数，所以$p \nmid 2011$，由指数提升（LTE）引理，$v_p(n^{2011}-1) = v_p(n-1) + v_p(2011) = v_p(n-1)$。所以$v_p(f(n)) = v_p(n^{2011}-1) - v_p(n-1) = 0$，$p \nmid f(n)$，矛盾！所以命题②成立。在命题①中，设$p$是$m$的一个素因子，则$2 \le p \le 2010$，不存在$n \in \mathbb{Z}$，使得$p \mid f(n)$。所以不存在$n \in \mathbb{Z}$，使得$m \mid f(n)$，命题①得证。 □

例 4.5. 求证：对任意给定的正整数m，总存在无穷多个正整数n，使得$\{2^n+3^n-i\}_{1 \le i \le m}$均为合数。

证. 先证明对给定的$m \in \mathbb{Z}_+$，若存在$n_0 \in \mathbb{Z}_+$使得$\{2^{n_0}+3^{n_0}-i\}_{i=1}^m$均为合数，则存在无穷多个$n \in \mathbb{Z}_+$使得$\{2^n+3^n-i\}_{i=1}^m$均为合数。设$p_i$为$2^{n_0}+3^{n_0}-i$的任一素因子，$1 \le i \le m$，$A = [p_1-1, p_2-1, ..., p_m-1]$是$\{p_i-1\}_{i=1}^m$的最小公倍数。令$n = n_0+kA$，$k \ge 0$，则 □

例 4.6. 设m,n为正整数，$m>1$，求证：$n!|(m^n-1)(m^n-m)...(m^n-m^{n}-1)$。

证. □

例 4.7. 设正整数$n \ge 4$，$a_1, a_2, ..., a_n$是n个不同的小于$2n$的正整数。求证：可以从$a_1, a_2, ..., a_n$中取出若干个数，使得它们的和是$2n$的倍数。

证. □

例 4.8. 是否存在整数a,b,c，使得方程$ax^2+bx+c=0$和$(a+1)x^2+(b+1)x+(c+1)=0$都有两个整数根?

证. □

例 4.9. 设n为正奇数，求证：存在一个十进制表示中每个数码都是奇数的正整数m，使得$n \mid m$。

证. □

例 4.10. 设正整数a,b,m,n满足$(a,b)=1$，$a>1$，且$a^m+b^m \mid a^n+b^n$。求证：$m \mid n$。

证. □

例 4.11. 设$a,b,c \in \mathbb{Z}$，a,b不全为零，则方程$ax+by=c$有整数解的充分必要条件是$(a,b)|c$。满足此条件时，设$x=x_0$，$y=y_0$是方程一组解，则它的全部整数解为$x = x_0 + \dfrac{b}{(a,b)}t$，$y = y_0 - \dfrac{a}{(a,b)}t$，其中$t$为任意整数。

证. □

例 4.12. 黑板上写着数$1, 2, ..., 33$，每次允许进行下面的操作，从黑板上任取两个满足$x \mid y$的数x, y，将它们从黑板上去掉，写上数$\frac{y}{x}$，直到黑板上不存在这样的两个数。问：黑板上至少剩下多少个数?

分析：这是一道操作与变换的问题，是组合与数论的交叉。与其它操作变换问题一样，证明的关键是找到操作中的不变量。

证. $\square$

例 4.13. 设a是给定整数，$a > 1$，$A_n = 1 + a + ... + a^n$, $n \geq 1$。求能整除数列$\{A_n\}_{n\geq 1}$中某一项的所有正整数。

证. $\square$

例 4.14. 设$n = 561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$为合数，求证：对任意满足$(a, n) = 1$的整数$a$，都有$a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$。

证. $\square$