局部不等式

一、知识要点

1. 对于和式类不等式，有时从整体考虑较难入手，故不妨先从局部入手，导出一些局部的不等式为整体服务。这里的局部既可以是某一单项，也可以是其中的若干项。

2. 切线法：在条件 $\sum_{i=1}^{n} x_i = C$ 的约束下求 $F=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ 的最小值时，假设 $x_i = x_0, 1\le i\le n$ 时 F 取最小值，$g(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线，则可以尝试证明 $f(x)\ge g(x)$。

3. 割线法：问题背景同上，假设 F 取最小值时 $x_i(1\le i\le n)$ 的取值恰为两个不同的实数 a,b，则可以尝试证明 $f(x)\ge \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$。

定理. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的一个邻域 $I=(x_0-\epsilon, x_0+\epsilon), \epsilon>0$ 上可导，且存在 $A\in\mathbb{R}$ 使得 $f(x)\ge A(x-x_0)+f(x_0),\quad x\in I$ 恒成立，则必有 $A=f'(x_0)$。

二、例题精讲

例 1.（1）设 $a,b,c\in\mathbb{R}_+$ 且 $a^2+b^2+c^2=3$。求证：$\dfrac{1}{a^3+2}+\dfrac{1}{b^3+2}+\dfrac{1}{c^3+2}\ge 1$。

（2）设 $x,y,z\in\mathbb{R}_+$ 且 $x^4+y^4+z^4=1$。求 $f=\dfrac{x^3}{1-x^8}+\dfrac{y^3}{1-y^8}+\dfrac{z^3}{1-z^8}$ 的最小值。

例 2. 设 $a,b,c\ge 0$ 且 $a+b+c=4$，求 $S=\dfrac{1}{a^2-6a+16}+\dfrac{1}{b^2-6b+16}+\dfrac{1}{c^2-6c+16}$ 的最大值，并确定何时取最大值。

例 3. 求最大的常数 k，使得对任意正实数 x,y,z，都有

$$\frac{x}{y^2+z^2}+\frac{y}{z^2+x^2}+\frac{z}{x^2+y^2}\ge\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}。$$

例 4.（2007，西部数学奥林匹克）设实数 a,b,c 满足 $a+b+c=3$。求证：

$$\frac{1}{5a^2-4a+11}+\frac{1}{5b^2-4b+11}+\frac{1}{5c^2-4c+11}\le\frac{1}{4}。$$

例 5. 设$x,y,z\ge 0$，且$x^2+y^2+z^2=1$。求证：$\dfrac{x}{1+yz}+\dfrac{y}{1+zx}+\dfrac{z}{1+xy}\ge 1$。

例 6. 设$x,y,z\ge 0$，求证：$\sqrt{\dfrac{x}{y+z}}+\sqrt{\dfrac{y}{z+x}}+\sqrt{\dfrac{z}{x+y}}\ge 2$。

例 7. 设$0\le a,b,c\le 1$，求证：$\dfrac{a}{bc+1}+\dfrac{b}{ca+1}+\dfrac{c}{ab+1}\le 2$。

例 8. 非负实数a,b,c满足$a+b+c=3$，求证：$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\ge ab+bc+ac$。

例 9. 设$a,b,c,d>0$，$a+b+c+d=1$。求证：$6(a^3+b^3+c^3+d^3)\ge a^2+b^2+c^2+d^2+\dfrac{1}{8}$。

例 10. 设$a,b,c>0$，证明：$\dfrac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\dfrac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\dfrac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$。

例 11. 设$a,b,c>0$，证明：$\dfrac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2}+\dfrac{(c+a-b)^2}{b^2+(c+a)^2}+\dfrac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2}\ge\dfrac{3}{5}$。

例 12. 设$a,b,c\in\mathbb{R}_+$，$a+b+c=3$。求证：$\sum\dfrac{1}{a\sqrt{2(a^2+bc)}}\ge\dfrac{9}{2(ab+bc+ca)}$。

例 13.（2009，塞尔维亚）设x,y,z为正实数，且$x+y+z=xy+yz+zx$。求证：

$\dfrac{1}{x^2+y+1}+\dfrac{1}{y^2+z+1}+\dfrac{1}{z^2+x+1}\le 1$，并确定等号成立的条件。

例 14. 已知非负实数 x, y, z 满足 $x^2+y^2+z^2=1$，求证：

$\sqrt{(1-xy)(1-zx)}+\sqrt{(1-yz)(1-xy)}+\sqrt{(1-zx)(1-yz)}\geq 2$ 。

例 15. 设实数 $a_1, a_2, ..., a_n \in(-1,1]$，约定 $a_{n+1}=a_1$ 。求证：$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i a_{i+1}}\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i^2}$ 。

例 16. 实数 x, y, z 满足 $x+y+z=1$，设 $F=\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}$ 。求证：（1）若 $x, y, z\leq\frac{4}{3}$，则 $F\leq\frac{27}{10}$；（2）若 $x, y, z\geq 0$，则 $F\geq\frac{5}{2}$ 。

例 17. 设 $x, y, z>0, x+y+z\geq 3$ 。求证：$\frac{1}{x^3+y+z}+\frac{1}{y^3+z+x}+\frac{1}{z^3+x+y}\leq\frac{3}{x+y+z}$ 。

例 18. 设 n 个实数，它们的绝对值都小于等于 2，其立方和为 0。证明：它们的和 $\leq\frac{2}{3}n$ 。

例 19. 已知正整数 $n\geq 3$，$[-1,1]$ 中的实数 $x_1, x_2, ..., x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}x_i^5=0$ 。求证：$\sum_{i=1}^{n}x_i\leq\frac{8}{15}n$ 。

例 20. 有 n 个互异的实数 $x_1, x_2, ..., x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}x_i=0$，$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1$ 。求证：存在 $a, b, c, d\in\{x_1, x_2, ...x_n\}$，使得 $a+b+c+nabc\geq\sum_{i=1}^{n}x_i^3\geq a+b+d+nabd$ 。