调和四边形

调和四边形

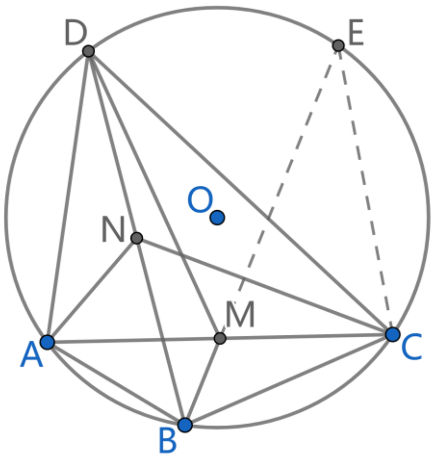
定义 1. 对边长度的乘积相等的圆内接四边形，称为调和四边形。

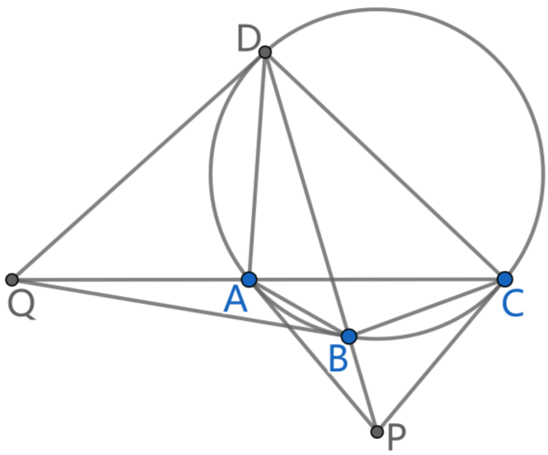
性质 1. 设四边形 $ABCD$ 为调和四边形，M 为 AC 中点，N 为 BD 中点，则 $\triangle ANB \backsim \triangle ADC \backsim \triangle BNC$，$\triangle AND \backsim \triangle ABC \backsim \triangle DNC$，$\triangle AMB \backsim \triangle DCB \backsim \triangle DMA$，$\triangle CMB \backsim \triangle DAB \backsim \triangle DMC$。

例 1.（2011，高联 A 卷）四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，M, N 分别为 AC, BD 的中点。若 $\angle BMC = \angle DMC$，求证：$\angle AND = \angle CND$。

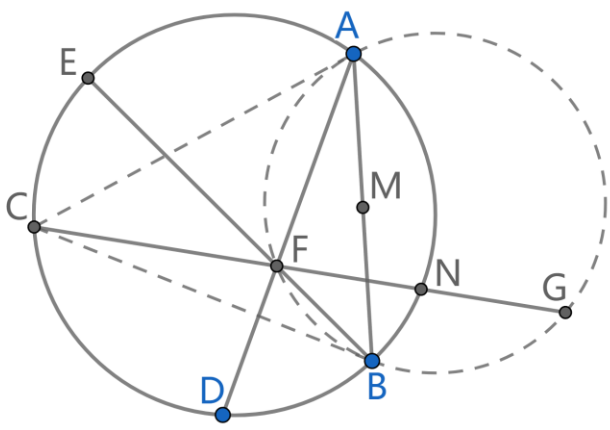
性质 2. 设 P 为圆 ω 外一点，PA, PC 是 ω 的两条切线，切点分别为 A, C，过 P 的一条 ω 的割线交 ω 于 B, D 两点，则四边形 $ABCD$ 为调和四边形。

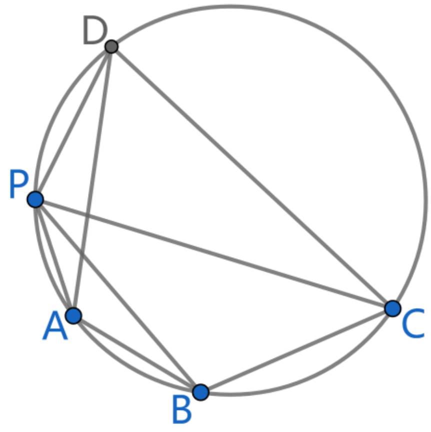
性质 3. 设四边形 $ABCD$ 为内接于圆 ω 的调和四边形，过 A, C 分别作 ω 的切线交于点 P，则 P, B, D 三点共线。同理，过 B, D 分别作 ω 的切线交于点 Q，则 Q, A, C 三点共线。





例 2.（2024，高联预赛广东）AB 为圆 O 的一条弦（$AB < \sqrt{3}R$, R 为圆 O 的半径），C 为优弧 AB 的中点，M 为弦 AB 的中点，点 D, E, N 分别在 BC, CA 和劣弧 AB 上，满足 $BD = CE$，且 AD, BE, CN 三线共点于 F。延长 CN 至 G，使 $GN = FN$。求证：$\angle FMB = \angle GMB$。



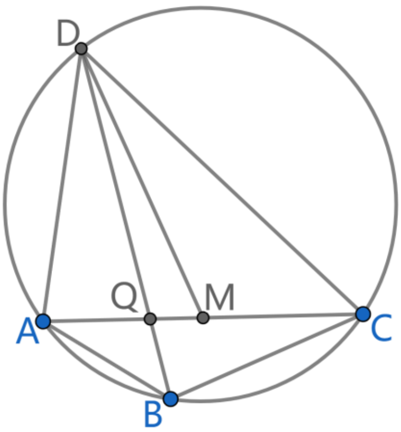


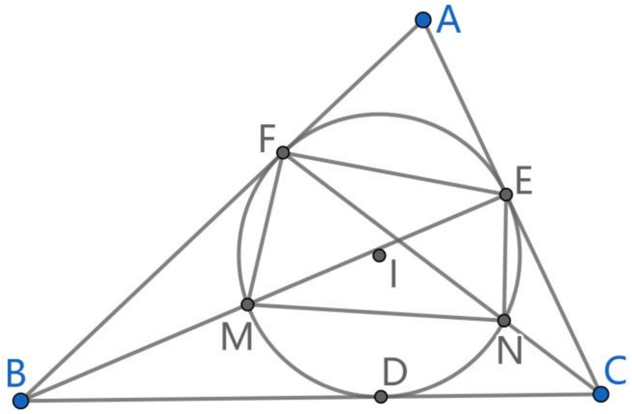
性质 4. 设四边形 $ABCD$ 为内接于圆 ω 的调和四边形， P 为 ω 上任意一点，则 $PA,PC;PB,PD$ 为调和线束，即 $\frac{\sin\angle APB}{\sin\angle CPB}=\frac{\sin\angle APD}{\sin\angle CPD}$ 。

定义 2. 三角形中线的等角线称为三角形的陪位中线。

性质 5. 设四边形 $ABCD$ 为调和四边形，对角线 AC,BD 交于点 Q ，则 DQ 为 $\triangle ACD$ 的陪位中线，BQ 为 $\triangle ABC$ 的陪位中线，CQ 为 $\triangle BCD$ 的陪位中线，AQ 为 $\triangle ABD$ 的陪位中线。

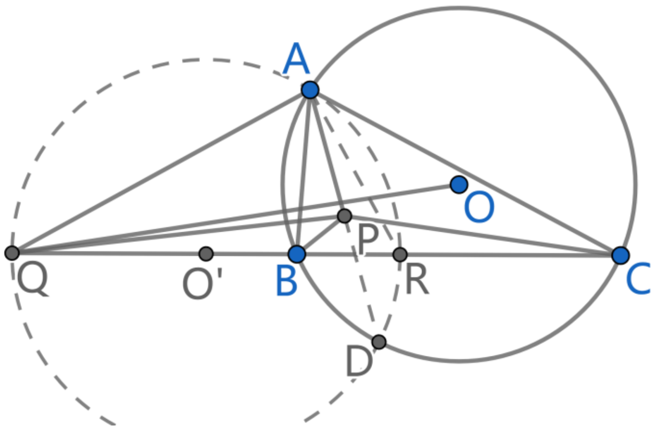
例 3. $\triangle ABC$ 的内切圆 $\odot I$ 分别与边 CA,AB 切于点 E,F ，BE,CF 分别与 $\odot I$ 交于点 M,N 。求证： $MN\cdot EF=3MF\cdot NE$ 。

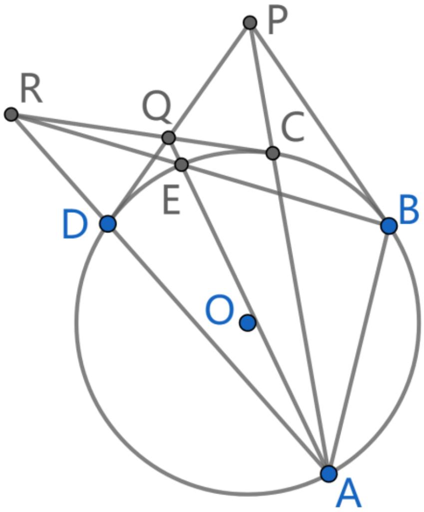




例 4. O 为锐角 $\triangle ABC$ 的外心，$AB<AC$ ，Q 为 $\angle BAC$ 的外角平分线与 BC 的交点，点 P 在 $\triangle ABC$ 的内部， $\triangle BPA\backsim\triangle APC$ 。求证： $\angle QPA+\angle OQB=\frac{\pi}{2}$ 。

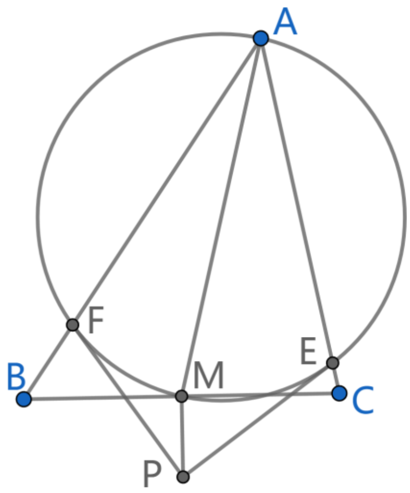
例 5. (2013，亚太数学奥林匹克) PB,PD 为 $\odot O$ 的切线，PCA 为 $\odot O$ 的割线，C 关于 $\odot O$ 的切线分别与 PD,AD 交于点 Q,R 。AQ 与 $\odot O$ 的另一个交点为 E 。求证： B,E,R 三点共线。

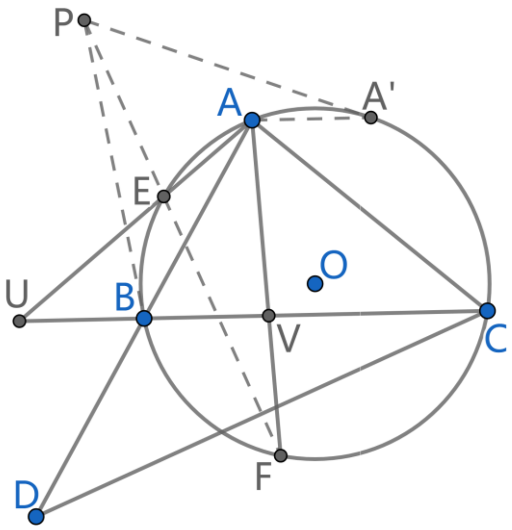




例 6. 在$\triangle ABC$中，M 为BC的中点，以AM 为直径的圆分别与AC,AB交于点E,F，过点E,F作以AM 为直径的圆的切线，交点为P 。求证：$PM\perp BC$ 。

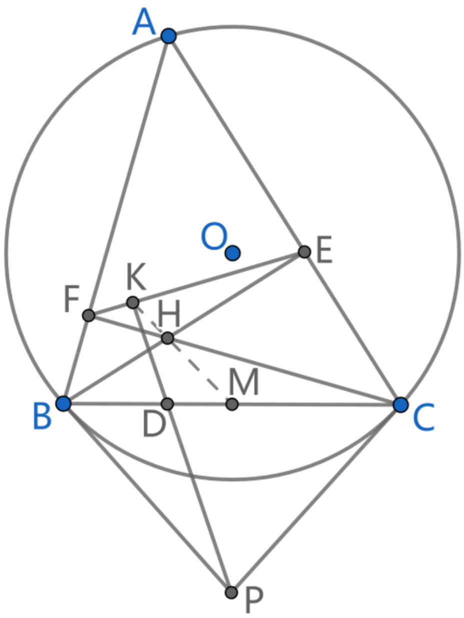
例 7. 在$\triangle ABC$中，$AB<AC$，A关于点B的对称点为D，CD的中垂线与$\triangle ABC$的外接圆$\odot O$交于点E,F，AE,AF分别与BC交于点U,V 。求证：B为UV中点。

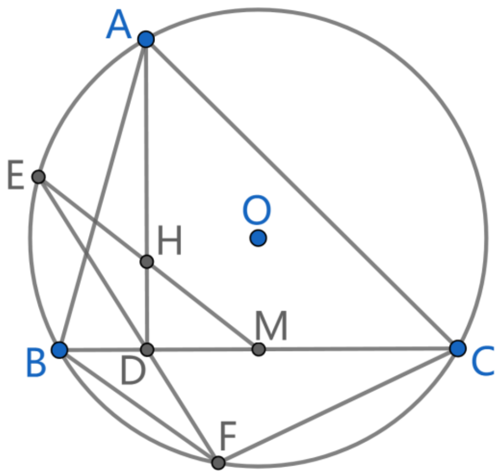




例 8. 已知$\triangle ABC$内接于$\odot O$，三条高线AD,BE,CF交于H，过点B,C作$\odot O$的切线交于点P，PD与EF交于点K，M为BC的中点。求证：K,H,M三点共线。

例 9.（2012，亚太数学奥林匹克）已知锐角$\triangle ABC$内接于$\odot O$，H为垂心，AH与BC交于点D，M为边BC的中点，延长MH，与$\odot O$交于点E，延长ED，与$\odot O$交于点F 。求证；四边形$ABFC$为调和四边形。

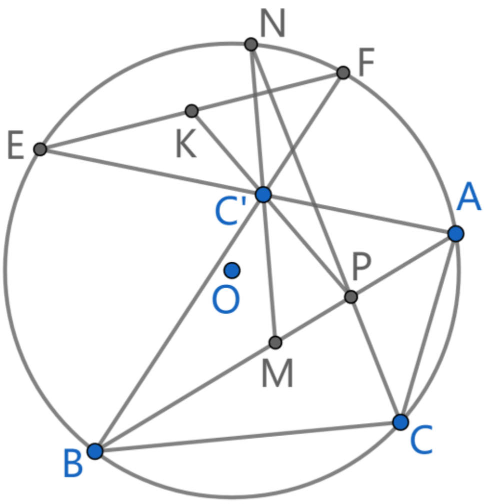


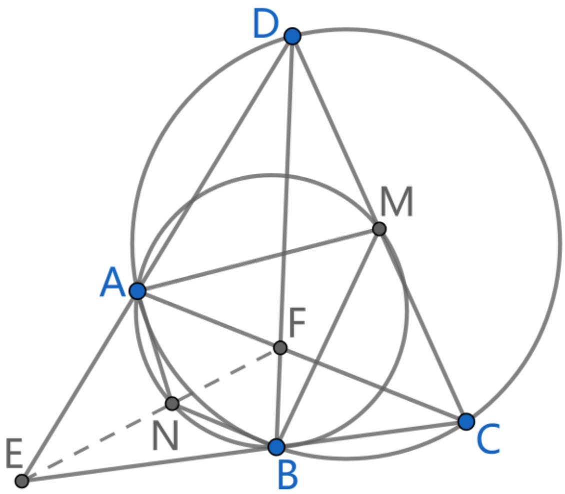


例 10.（2011，哈萨克斯坦）已知钝角$\triangle ABC$内接于$\odot O$，$\angle C>\dfrac{\pi}{2}$，C'为C关于AB的

对称点，AC' 与 $\odot O$ 交于点 E，BC' 与 $\odot O$ 交于点 F，M 为 AB 的中点，MC' 与 $\odot O$ 交于点 N（点 C' 在 M 与 N 之间），K 为 EF 的中点。求证：AB, CN, KC' 三线共点。

例 11. 已知凸四边形 $ABCD$ 内接于圆，AD, BC 的延长线交于点 E，对角线 AC 与 BD 交于点 F，M 为 CD 的中点，N 为 $\triangle ABM$ 的外接圆上不同于 M 的点，且满足 $\frac{AN}{BN}=\frac{AM}{BM}$。求证：$E, F, N$ 三点共线。





例 12.（2010，伊朗）已知锐角 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，$\angle C=\frac{\pi}{4}$，AD 为高线，点 X 在线段 AD 内部，且满足 $\angle XBC=\frac{\pi}{2}-\angle B$，$AD, CX$ 分别与 $\odot O$ 交于点 M, N，过 M 关于 $\odot O$ 的切线与 AN 交于点 P。求证：P, B, O 三点共线。

例 13. 已知锐角 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，H 为垂心，M 为 BC 的中点，点 U 在 BC 上，且满足 $\angle BAM=\angle CAU$，K 为点 H 在过点 A 关于 $\odot O$ 的切线上的射影，L 为点 H 在 AU 上的射影。求证：K, L, M 三点共线。