综合练习-1

例 1. 将 1,2,3,4 各四个分别填入 4×4 的方格表的每格中，使得方格表的每行和每列恰有 1,2,3,4 各一个，有几种不同的填法？

例 2. 每一秒钟，会有一只在点 X 的蚱蜢跳过另一只在点 Y 的蚱蜢到达 X 关于 Y 的对称点 Z。（1）有三只蚱蜢 A,B,C 在一条直线上，其中 B 在 A 与 C 的中点。经过若干次跳动后，三只蚱蜢还在原先的三个位置上，但次序可能不同。求证：B 必然回到 A 与 C 的中点上。（2）有四只蚱蜢在一个正方形的四个顶点上。求证：经过若干次跳动后，任意三只蚱蜢不在同一条直线上。

例 3. 一个机器人初始时在一个 5x5 的正方形网格正中央，每经过 1 秒，它都会从当前的位置以相等的概率移动到相邻 8 个格子中的任意一个。当它走到最外圈的 16 个格子中的任何一个时，它才停止运动。那么这个机器人最终恰好停在 4 条边正中间的方格之一的概率是多少？

例 4. 求斐波那契数列第 2020 项的末位数是几（$F_1=F_2=1, F_{n+2}=F_{n+1}+F_n, n\geq 1$）。

例 5. 已知正实数 a,b,c 满足 $\log_a b+\log_b c+\log_c a=0$，求 $(\log_a b)^3+(\log_b c)^3+(\log_c a)^3$ 的值。

例 6. 已知四棱锥 $P-ABCD$，底面 $ABCD$ 为菱形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{3}$，

E 是 BC 中点。若 H 为 PD 上的动点，EH 与平面 PAD 所成最大角的正切值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$，求 $\frac{PA}{BD}$ 的值。

例 7. 已知集合 $A=\{1,2,3,\ldots,12\}$，求 A 的所有非空子集中，最小元与最大元之和为 13 的个数有多少。

例 8. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$F_1,F_2$ 为其左、右焦点，Q 为椭圆 C 上任意一点。$\triangle F_1QF_2$ 的重心为 G，内心为 I，直线 IG 与 x 轴平行，求椭圆 C 的离心率。

例 9. 数列 $\{a_n\}$ 满足对任意正整数 n，均有 $\prod_{i=1}^{n}a_i=1+\sum_{i=1}^{n}(a_i-1)$。求 $\sum_{i=1}^{2020}|a_i-i|$ 的最小值。

例 10. 三个半径为 1 的球互相外切，且每个球都同时与另外两个半径为 r 的球外切，若这两个半径为 r 的球也互相外切，求 r 的值。

例 11. 已知$a,b\in\mathbb{R}$，若函数 $f(x)=|a\sin x+b\cos x-1|+|b\sin x-a\cos x|$的最大值为 11，求$a^2+b^2$的值。

例 12. 若实数$a,b,c,d\in[-1,\infty)$，且$a+b+c+d=0$，求$ab+bc+cd$的最大值。

例 13. 已知实数x,y满足$x^2\le y^2+1$且$(x-1)^2\le 1-y^2$，求$y-2x$的最大值。

例 14. 设a,b是正的常数，$n\ge 2$是正整数，$x_1,x_2,...,x_n$是正实数，求

$F=\dfrac{x_1x_2...x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)...(x_{n-1}+x_n)(x_n+b)}$的最大值。

例 15. 设$0<x_1<x_2<...<x_n<1$，求证：$(1-x_n)^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\dfrac{x_i^i}{(1-x_i^{i+1})^2}<1$。

例 16. 求证：在任意n个人中，总存在两人，使得剩下$n-2$人中至少有$[\dfrac{n}{2}]-1$人，他们每个人要么与这两人都认识，要么与这两人都不认识。

例 17. 设数列$\{a_n\},\{b_n\}$满足$a_0=b_0=1$，且对于任意自然数n，均有$a_{n+1}=\frac{6}{5}a_n-\frac{3}{5}b_n-(a_n^2+b_n^2)a_n$，$b_{n+1}=\frac{3}{5}a_n+\frac{6}{5}b_n-(a_n^2+b_n^2)b_n$，求数列$\{a_n+b_n\}$的通项公式。

例 18. 数列$\{a_n\}$定义为$a_0=1,a_1=3,a_n=4a_{n-1}-a_{n-2}(n\geq 2)$。求证：该数列的每一项均能表示为$a^2+2b^2(a,b\in\mathbb{N})$的形式。

例 19. 已知函数$f(x)=\dfrac{3-2x}{x^2+a}$。（1）若$a=0$，求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；（2）若$f(x)$在$x=-1$处取得极值，求$f(x)$的单调区间，并求其最大值与最小值。

例 20. 已知函数$f(x)=(e^{-x}-2)(x^2-k)-2x-2$，其中$k\in\mathbb{R}$。（1）当$k=0$时，求曲线$y=f(x)$在点$(-1,f(-1))$处的切线方程；（2）若对任意$x\in[-1,+\infty)$，$f(x)\leq 0$恒成立，求实数$k$的取值范围。