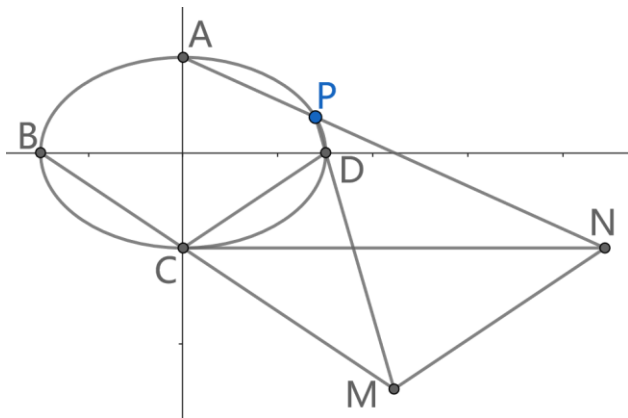
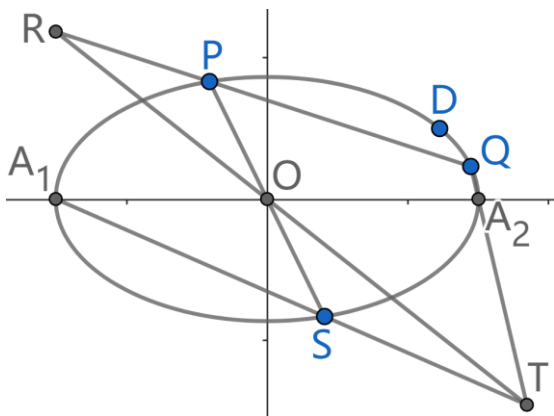


解析几何-1

例 1. (2023, 北京高考) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$, A, C 分别是 E 的上、下顶点, B, D 分别是 E 的左、右顶点, $|AC|=4$. (1) 求 E 的方程; (2) 设 P 为第一象限内 E 上的动点, 直线 PD 与直线 BC 交于点 M , 直线 AP 与直线 $y=-2$ 交于点 N , 求证: $MN \parallel CD$.

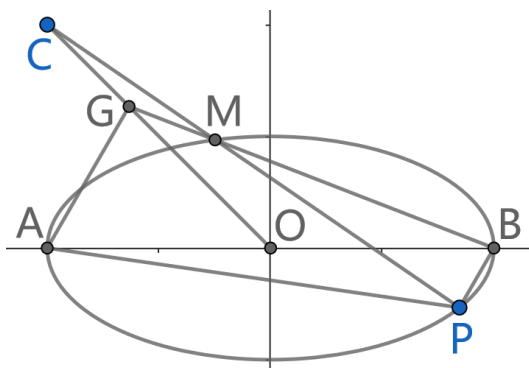


例 2. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , $D(\sqrt{6}, 1)$ 为椭圆 C 上一点, P, Q 为椭圆 C 上异于 A_1, A_2 的两点, 且直线 PQ 不与坐标轴平行, 点 P 关于原点 O 的对称点为 S , $\overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{DS}$ 的最大值为 4. (1) 求椭圆 C 的标准方程; (2) 若直线 A_1S 与直线 A_2Q 相交于点 T , 直线 OT 与直线 PQ 相交于点 R . 求证: 在椭圆 C 上存在定点 E , 使得 $\triangle RDE$ 的面积为定值, 并求出该定值.

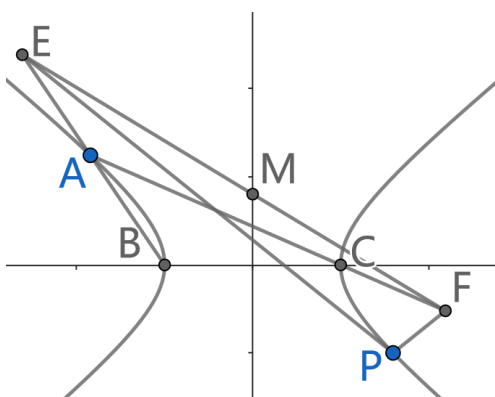


例 3. A, B 为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点, 焦距长为 $2\sqrt{3}$, 点 P 在椭圆 E 上, 直线 PA, PB 的斜率之积为 $-\frac{1}{4}$. (1) 求椭圆 E 的方程; (2) 已知 O 为坐标原点,

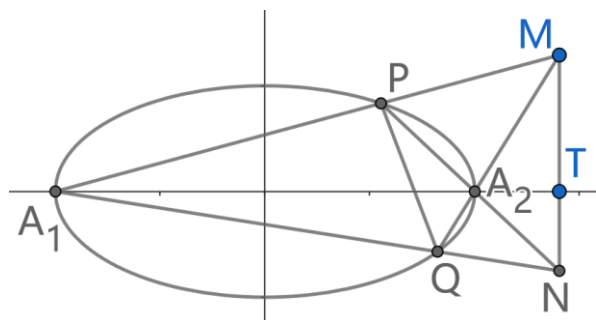
点 $C(-2,2)$ ，直线 PC 交椭圆 E 于点 M (M, P 不重合)，直线 BM, OC 交于点 G 。求证：直线 AP, AG 的斜率之积为定值，并求出该定值。



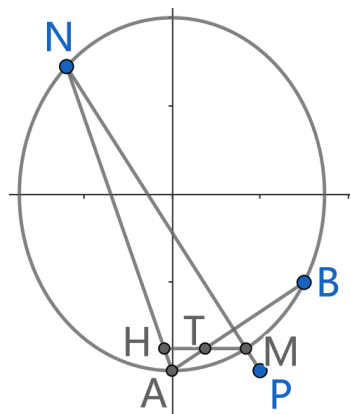
例 4. 已知双曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ 与 x 轴的左右交点分别为 B, C ， A, P 为双曲线上不与 B, C 重合的不同两点，过 P 作双曲线 Γ 渐近线方向的平行线，分别交直线 AB, AC 于 E, F 。求证： EF 过定点。



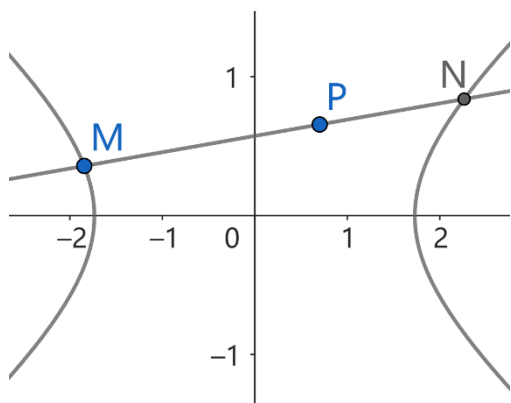
例 5. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点分别为 $F_1(-\sqrt{3}, 0)$ ， $F_2(\sqrt{3}, 0)$ ，且椭圆与直线 $y = x + \sqrt{5}$ 相切。(1) 求椭圆的方程；(2) 设椭圆的左右顶点分别为 A_1, A_2 ，若直线 $l: x = t (t > a)$ 与 x 轴交于 T 点，点 M 为直线 l 上异于 T 的任意一点，直线 MA_1, MA_2 分别与椭圆交于 P, Q 两点，连结 PA_2 的直线与 l 交于 N 点。是否存在 t ，使得直线 PQ 与以 MN 为直径的圆总相切？若存在，求出 t ；若不存在，请说明理由。



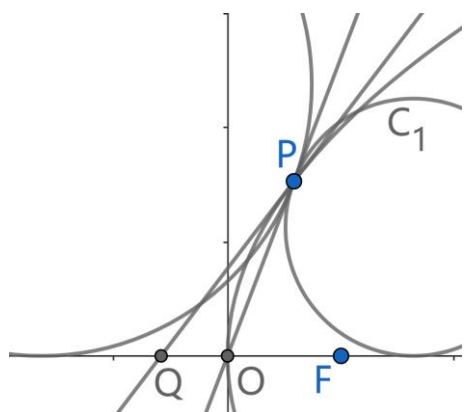
例 6. 已知椭圆 E 的中心为坐标原点, 对称轴为 x 轴、 y 轴, 且过 $A(0, -2)$, $B(\frac{3}{2}, -1)$ 两点。(1) 求 E 的方程; (2) 设过点 $P(1, -2)$ 的直线交 E 于 M, N 两点, 过 M 且平行于 x 轴的直线与线段 AB 交于点 T , 点 H 满足 $\overline{MT} = \overline{TH}$ 。求证: 直线 NH 过定点。



例 7. (2022, 高联 A 卷) 在平面直角坐标系中, 双曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 。对平面内不在 Γ 上的任意一点 P , 记 Ω_P 为过点 P 且与 Γ 有两个交点的直线的全体。对任意直线 $l \in \Omega_P$, 记 M, N 为 l 与 Γ 的两个交点, 定义 $f_P(l) = |PM| \cdot |PN|$ 。若存在一条直线 $l_0 \in \Omega_P$ 满足: l_0 与 Γ 的两个交点位于 y 轴两侧, 且对任意直线 $l \in \Omega_P$, $l \neq l_0$, 均有 $f_P(l) > f_P(l_0)$, 则称 P 为“好点”。求所有好点所构成的区域的面积。

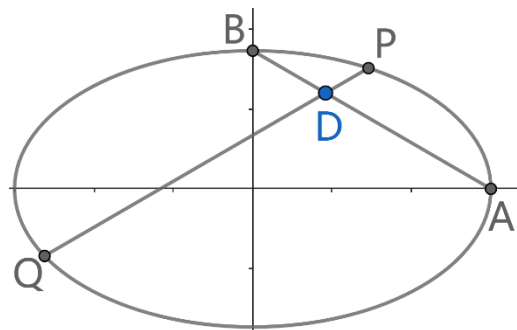


例 8. (2016, 高联 A 卷) 在平面直角坐标系 xOy 中, F 是 x 轴正半轴上的一个动点, 以 F 为焦点、 O 为顶点作抛物线 C 。设 P 是第一象限内 C 上的一点, Q 是 x 轴负半轴上一点, 使得 PQ 为 C 的切线, 且 $|PQ|=2$ 。圆 C_1, C_2 均与直线 OP 相切于点 P , 且均于 x 轴相切。求点 F 的坐标, 使圆 C_1, C_2 的面积之和取最小值。



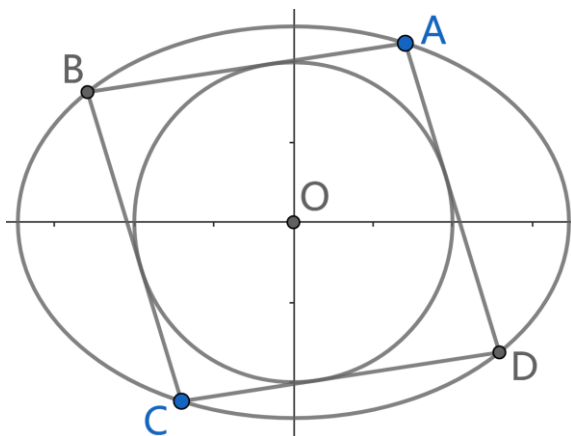
例 9. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右顶点和上顶点分别为 A, B , 斜率为 $\frac{b}{a}$ 的直

线 l 不经过点 A, B 且与椭圆 C 交于不同的两点 P, Q 。求证: P, Q, A, B 四点共圆。

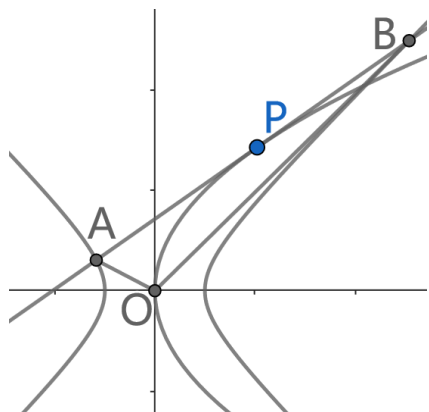


例 10. 已知 $C_0: x^2 + y^2 = 1$ 和 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 试问: 当且仅当 a, b 满足什

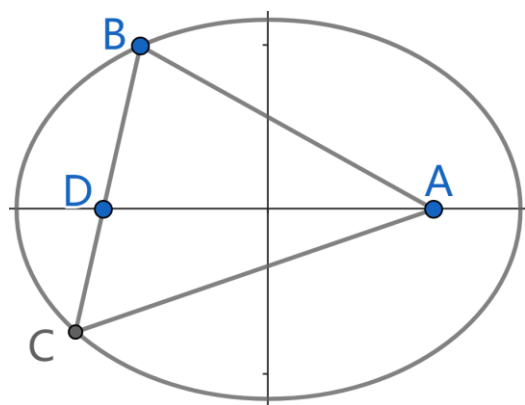
么条件时, 对 C_1 上的任意一点 A , 均存在以 A 为顶点, 与 C_0 外切, 且内接于 C_1 的平行四边形?



例 11. (2022, 高联 A1 卷) 在平面直角坐标系 xOy 中, 设一条动直线 l 与抛物线 $\Gamma: y^2 = 4x$ 相切, 且与双曲线 $\Omega: x^2 - y^2 = 1$ 交于左、右两支各一点 A, B 。求 $\triangle AOB$ 的面积的最小值。



例 12. (2022, 高联 A2 卷) 已知 $\triangle ABC$ 及其边 BC 上的一点 D , 满足 $AB = 2BD$, $AC = 3CD$, 且以 A, D 为焦点可以作一个椭圆 Γ 同时经过 B, C 两点。求 Γ 的离心率。

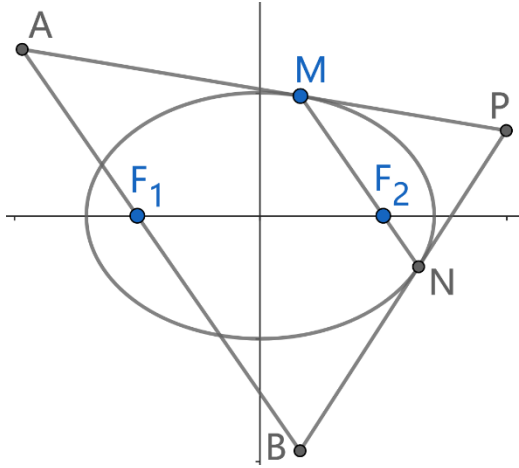


例 13. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 焦距与短轴长均为

4。(1) 求 E 的方程; (2) 设任意过 F_2 的直线 l 交 E 于 M, N , 分别作 E 在点 M, N 处的

切线，且两条切线相交于点 P ，过 F_1 作平行于 l 的直线分别交 PM, PN 于 A, B 。求

$\frac{|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OP}|}$ 的取值范围。



例 14. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两焦点分别为 F_1, F_2 ， C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

C 上有三点 Q, R, S ，直线 QR, QS 分别过 F_1, F_2 ， $\triangle QRF_2$ 的周长为 8。(1) 求 C 的方程；(2) 若 $Q(0, b)$ ，求 $\triangle QRS$ 的面积；证明：当 $\triangle QRS$ 面积最大时， $\triangle QRS$ 必定经过 C 的某个顶点。

