数论选讲-1

一、知识要点

定理 1.（本原勾股数定理）设正整数a,b,c满足勾股方程$a^2+b^2=c^2$，且$(a,b)=1$，则存在一奇一偶的正整数$u,v,u>v>0,(u,v)=1$，使得$c=u^2+v^2$，$a=u^2-v^2,b=2uv$或$a=2uv,b=u^2-v^2$。称满足上述条件的(a,b,c)为本原勾股数。

定义 1.（p进赋值）设p为素数，整数n的p进赋值（记为$v_p(n)$）定义如下：若$n\neq 0$，则$v_p(n)=\max\{k\geq 0,p^k\mid n\}$；若$n=0$，则$v_p(0)=\infty$。

定理 2.（勒让德公式）设n为正整数，p为素数，$S_p(n)$为n在p进制下各位数字之和。则$v_p(n!)=\sum_{i\geq 1}\left\lfloor\frac{n}{p^i}\right\rfloor=\frac{n-S_p(n)}{p-1}$。

定理 3.（裴蜀等式）整数a,b互素的充分必要条件是，存在整数x,y，使得$ax+by=1$。输入a,b，上述x,y可由扩展的欧几里得算法在有限步内给出。

定理 4.（指数提升（lifting-the-exponent，简称 LTE）引理）设x,y为整数，n为正整数，p是素数且$p\nmid x,y$，则下列命题成立：

（1）$p\neq 2$时，若$p\mid x-y$，则$v_p(x^n-y^n)=v_p(x-y)+v_p(n)$；若$2\nmid n$且$p\mid x+y$，则$v_p(x^n+y^n)=v_p(x+y)+v_p(n)$。

（2）$p=2$时，$2\nmid x,y$能推出$2\mid x-y$，若$2\mid n$，则$v_2(x^n-y^n)=v_2(x-y)+v_2(x+y)+v_2(n)-1$；若$2\nmid n$，则$v_2(x^n-y^n)=v_2(x-y)$。推论：若$4\mid x-y$，则$v_2(x+y)=1$，且$v_2(x^n-y^n)=v_2(x-y)+v_2(n)$。

（3）对所有素数p，若$(n,p)=1$，且$p\mid x-y$，则$v_p(x^n-y^n)=v_p(x-y)$；若$(n,p)=1,p\mid x+y$，且$2\nmid n$，则$v_p(x^n+y^n)=v_p(x+y)$。

二、例题精讲

例 1. 正整数 a,b,c 满足 $c^2=a^2+b^2+ab$，求证：c 有一个大于 5 的素因子。

例 2. 设正整数 a,b,c 满足方程 $c^2=a^2+b^2+ab$，且 $(a,b)=1$。求证：存在正整数 $x,y,(x,y)=1,x>y$，使得 $c=x^2+y^2+xy$，$a=2xy+y^2,b=x^2-y^2$ 或 $a=x^2-y^2,b=2xy+y^2$。

例 3. 设 $f(n)=1+n+n^2+...+n^{2010}$，求证：对任意正整数 m，若 $2\le m\le 2010$，则不存在整数 n，使得 $m\,|\,f(n)$。

例 4. 求证：对任意给定的正整数 m，总存在无穷多个正整数 n，使得 $\{2^n+3^n-i\}_{1\le i\le m}$ 均为合数。

例 5. 设 m,n 为正整数，$m>1$，求证：$n!\,|\,(m^n-1)(m^n-m)...(m^n-m^{n-1})$。

例 6. 设正整数 $n\ge 4$，$a_1,a_2,...,a_n$ 是 n 个不同的小于 $2n$ 的正整数。求证：可以从 $a_1,a_2,...,a_n$ 中取出若干个数，使得它们的和是 $2n$ 的倍数。

例 7. 是否存在整数 a,b,c，使得方程 $ax^2+bx+c=0$ 和 $(a+1)x^2+(b+1)x+(c+1)=0$ 都有两个整数根?

例 8. 设 n 为正整数，求证：$2^{2^n}+2^{2^{n-1}}+1$ 至少有 n 个不同的素因子。

例 9. 设n为正整数，p是素数，若整数a,b,c满足$a^n+pb=b^n+pc=c^n+pa$，求证：$a=b=c$。

例 10. 设n为正奇数，求证：存在一个十进制表示中每个数码都是奇数的正整数m，使得$n\mid m$。

例 11. 设正整数a,b,m,n满足$(a,b)=1, a>1$，且$a^m+b^m\mid a^n+b^n$。求证：$m\mid n$。

例 12. 设$a,b,c\in\mathbb{Z}$，a,b不全为零，则方程$ax+by=c$有整数解的充分必要条件是$(a,b)\mid c$。满足此条件时，设$x=x_0, y=y_0$是方程一组解，则它的全部整数解为

$x=x_0+\dfrac{b}{(a,b)}t, y=y_0-\dfrac{a}{(a,b)}t$，其中$t$为任意整数。

例 13. 黑板上写着数$1,2,...,33$，每次允许进行下面的操作，从黑板上任取两个满足$x\mid y$的数x,y，将它们从黑板上去掉，写上数$\dfrac{y}{x}$，直到黑板上不存在这样的两个数。问：黑板上至少剩下多少个数?

例 14. 设a是给定整数，$a>1$，$A_n=1+a+...+a^n, n\geq 1$。求能整除数列$\{A_n\}_{n\geq 1}$中某一项的所有正整数。

例 15. 设$n=561=3\cdot 11\cdot 17$为合数，求证：对任意满足$(a,n)=1$的整数a，都有$a^{n-1}\equiv 1\,(\bmod n)$。