1 圆的性质-2

例 1.1 (2024,高联B卷)**.** 在凸四边形$ABCD$中，AC平分$\angle BAD$，且$AC^2 = AB \cdot AD$。点E, F分别在边BC, CD上，满足$EF /\!/ BD$。$\odot(CBF)$和$\odot(CDE)$交于C及另一点T。求证：T在直线AC上。

证.

$$\triangle ABC \backsim \triangle ACD \backsim \triangle TBF \backsim \triangle TED,$$

□

例 1.2. 已知A, B, C, D四点共圆，AC交BD于E，AD交BC于F。作平行四边形$DECG$和E关于直线DF的对称点H，求证：D, G, F, H四点共圆。

证. $\triangle FAB \backsim \triangle FCD$, $\triangle FBE \backsim \triangle FDG$，所以$\angle FGD = \angle FEB = \pi - \angle FED = \pi - \angle FHD$。 □

例 1.3. 设$ABCD$是一个平行四边形，P是它两条对角线的交点，M是AB边的中点。点Q满足QA与$\odot(MAD)$相切，QB与$\odot(MBC)$相切。求证：Q, M, P三点共线。

证. 只需证明$d(Q, AD) = d(Q, BC)$，即$QA \sin\angle QAD = QB \sin\angle QBC \iff \dfrac{QA}{QB} = \dfrac{\sin\angle QBC}{\sin\angle QAD}$ ①。$\angle QAD = \pi - \angle DMA = \pi - \angle MDC$, $\angle QBC = \pi - \angle CMB = \pi - \angle MCD$，①式右边$= \dfrac{\sin\angle MCD}{\sin\angle MDC} = \dfrac{MD}{MC}$。因为$AD /\!/ BC /\!/ PM$，所以①式左边$= \dfrac{\sin\angle QBA}{\sin\angle QAB} = \dfrac{\sin\angle MCB}{\sin\angle MDA} = \dfrac{\sin\angle PMC}{\sin\angle PMD}$，又因为$1 = \dfrac{[PMC]}{[PMD]} = \dfrac{MC\sin\angle PMC}{MD\sin\angle PMD}$，所以①式成立。 □

例 1.4. $\triangle ABC$中，$AN \perp BC$于N，M是BC中点，过M任意作一条直线与以AB为直径的圆交于D, E两点，$\triangle ADE$的垂心为H。求证：A, H, C, N四点共圆。

证. □

例 1.5. $\triangle ABC$中，$\angle BAC = \dfrac{\pi}{3}$，过$A$作$\angle B, \angle C$的外角平分线的垂线，垂足分别为$D, E$。设$O$为$\triangle ABC$的外心，求证：$\odot(BOC)$与$\odot(AED)$相切。

证. □

2 数列和函数的极限

例 2.1 (2012，高联B卷)**.** 设数列$\{x_n\}_{n\geq 0}$满足$x_0 > 0$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}$, $n \geq 0$。求证：存在常数$A > 1$和常数$C > 0$，使得$|x_n - A| < \dfrac{C}{A^n}$对任意正整数$n$成立。

解. $A = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, $A^2 = A + 1$,

$$x_{n+1} - A = \sqrt{x_n + 1} - A = \frac{x_n + 1 - A^2}{\sqrt{x_n + 1} + A} = \frac{x_n - A}{\sqrt{x_n + 1} + A},$$

□

3 几何选讲-2

例 3.1. 锐角$\triangle ABC$中，$AB > AC$，CP, BQ分别为AB, AC边上的高，P, Q为垂足。直线PQ交BC于X。$\triangle AXC$外接圆与$\triangle PQC$外接圆再次相交于点Y。求证：PY平分AX。

证. 法一（同一法）：设AX中点为D，PD与$\triangle AXC$外接圆交于Y'点。作P关于D的对称点R，则四边形$APXR$是平行四边形，$\angle ARX = \angle APX = C$，所以$A, C, X, R$四点共圆。$DY' \cdot DP = DY' \cdot DR = DA \cdot DX = DA^2$，于是$\triangle DY'A \backsim \triangle DAP$, $\angle DY'A = \angle DAP$。又因为$\angle AXC + \angle AY'D + \angle CY'D = \angle AXC + \angle AY'C = \pi = \angle AXC + \angle XAP + B$，所以$\angle CY'D = B$，$Y', P, B, C$四点共圆。于是$Y'$就是$\triangle PQC$外接圆与$\triangle AXC$外接圆的另一个交点，$Y, Y'$重合，$PY$平分$AX$。

法二（三角法）：设BC中点为M，$BPQC$四点共圆，圆心为M。设$\triangle AXC$外心为N，$\angle NMC = \angle YBC = \alpha$，则$\angle APY = \frac{\pi}{2} - \angle CPY = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\angle XPY = \angle CPY - \angle CPQ = \alpha - \frac{\pi}{2} + C$。于是

$$PY\text{平分}AX \iff AP\sin\angle APY = XP\sin\angle XPY \iff AP\cos\alpha = -XP\cos(C+\alpha), \qquad ①$$

$$\text{因为}AP = b\cos A, \qquad XP = BP \cdot \frac{\sin B}{\sin(C-B)} = \frac{a\cos B\sin B}{\sin(C-B)},$$

$$\text{所以①式} \iff \sin C\tan\alpha - \cos C = \frac{AP}{XP} = \frac{\sin(C-B)}{\cos B}\cot A,$$

（后面依然武德充沛，但不想写了） □

例 3.2. 四边形$ABCD$内接于$\odot O$，直线CD交AB于M（$MB < MA$，$MC < MD$），K是$\odot(AOC)$与$\odot(DOB)$除点O外的另一个交点。求证：$\angle MKO = \frac{\pi}{2}$。

证. 因为$AO = CO$，所以$\angle AKO = \angle ACO = \angle CAO = \angle CKO$，同理，$\angle BKO = \angle BDO = \angle DBO = \angle DKO$。$\angle AKD = \angle DKO - \angle AKO = \angle DBO - \angle ACO = (\frac{\pi}{2} - \angle BAD) - (\frac{\pi}{2} - \angle ABC) = \angle ABC - \angle BCM = \angle AMD$，所以$A, D, K, M$四点共圆。同理，$\angle BKC = \angle BKO - \angle CKO = \angle BMC$，所以$B, C, K, M$四点共圆。设$AD, BC$交于点$E$，由四边形的密克定理，$K$是四边形$ABCD$的密克点， A, B, K, E四点共圆，C, D, K, E四点共圆，且E, K, M三点共线。所以$\angle CKM = \angle CBA = \angle EKA$，又因为$\angle AKO = \angle CKO$，所以$\angle MKO = \angle CKM + \angle CKO = \frac{1}{2}\angle EKM = \frac{\pi}{2}$。 □

例 3.3. 圆ω是$\triangle ABC$的外接圆，M是弧AB的中点，过A作ω的切线交直线BC于P，直线PM交ω于Q（异于M），过Q作ω的切线交AC于K。求证：$AB /\!/ PK$。

证. 法一：因为$\triangle KAQ \backsim \triangle KQC$，所以$\frac{KA}{KC} = \frac{KA}{KQ} \cdot \frac{KQ}{KC} = (\frac{AQ}{CQ})^2$。因为$\triangle PMA \backsim \triangle PAQ$，所以$\frac{AQ}{AM} = \frac{PA}{PM}$。因为$\triangle PBM \backsim \triangle PQC$，所以$\frac{BM}{CQ} = \frac{PM}{PC}$，$\frac{AQ}{CQ} = \frac{AQ}{AM} \cdot \frac{BM}{CQ} = \frac{PA}{PM} \cdot \frac{PM}{PC} = \frac{PA}{PC}$。因为$PA^2 = PB \cdot PC$，所以$\frac{KA}{KC} = (\frac{AQ}{CQ})^2 = (\frac{PA}{PC})^2 = \frac{PB}{PC}$，于是$AB /\!/ PK$。

法二：设CM交AQ于L，直线AB的无穷远点为∞_{AB}。由帕斯卡定理，考察圆内接六边形$AACMQQ$，有P, L, K三点共线；考察圆内接六边形$ABCMMQ$，有P, L, ∞_{AB}三点共线。所以P, L, K, ∞_{AB}四点共线，$PK /\!/ AB$。

注：本题中M既可以是劣弧AB的中点，也可以是优弧AB的中点。 □

例 3.4. 过以AB为直径的$\odot O$外一点S作该圆的切线SP，P为切点，直线SB与$\odot O$相交于B和C，过B作PS的平行线，分别与直线OS, PC相交于D和E，延长AE与$\odot O$相交于F。求证：$PD /\!/ BF$。

证. □

例 3.5 (加强的欧拉不等式)**.** 回忆：设$\triangle ABC$的外心、内心分别为O,I，则由欧拉定理，我们有$R^2-2Rr=OI^2\geq 0$, $R\geq 2r$。试证明下列不等式，它比上述欧拉不等式更强：

$$\frac{R}{r}\geq\frac{abc+a^3+b^3+c^3}{2abc}\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-1\geq\frac{2}{3}(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})\geq 2, \qquad ①$$

证. （1）设$p=\dfrac{a+b+c}{2}$, $x=p-a$, $y=p-b$, $z=p-c$，则$x,y,z>0$, $a=y+z$, $b=x+z$, $c=x+y$。由$S=\dfrac{abc}{4R}=pr=\sqrt{pxyz}$，我们有

$$\frac{R}{r}=\frac{abc/4S}{r}=\frac{abcp}{4S^2}=\frac{abcp}{4pxyz}=\frac{abc}{4xyz}, \qquad \text{①式最左侧的不等号}$$

$$\iff (abc)^2\geq 2xyz(abc+\sum a^3)\iff\prod(x+y)^2\geq 2xyz(\prod(x+y)+\sum(x+y)^3), \qquad ②$$

$$\text{②式左边}=(\sum x^2y+\sum xy^2+2xyz)^2=(\sum x^2y)^2+(\sum xy^2)^2+4x^2y^2z^2+2(\sum x^2y)(\sum xy^2)$$

$$+4xyz(\sum x^2y+\sum xy^2), \qquad \text{②式右边}=2xyz(4\sum x^2y+4\sum xy^2+2xyz+2\sum x^3),$$

$$\text{②式左边}-\text{右边}=(\sum x^2y)^2+(\sum xy^2)^2+2(\sum x^2y)(\sum xy^2)-4xyz(\sum x^3+\sum x^2y+\sum xy^2)$$

$$=\sum x^4y^2+2\sum x^2y^3z+\sum x^4z^2+2\sum xy^3z^2+2\sum x^3y^3+2\sum x^4yz+6x^2y^2z^2$$

$$-4xyz(\sum x^3+\sum x^2y+\sum xy^2)=\sum x^4y^2+\sum x^4z^2+2\sum x^3y^3+6x^2y^2z^2$$

$$-2xyz(\sum x^3+\sum x^2y+\sum xy^2)=\prod(x-y)^2+4\sum x^3y^3-4xyz(\sum x^2y+xy^2)+12x^2y^2z^2, \qquad ③$$

我们在最后一步中使用了$\prod(x-y)^2=(\sum x^2y-\sum xy^2)^2=(\sum x^2y)^2+(\sum xy^2)^2-2(\sum x^2y)(\sum xy^2)=\sum x^4y^2+\sum x^2y^4+2xyz(\sum x^2y+\sum xy^2)-2\sum x^3y^3-6x^2y^2z^2-2xyz\sum x^3$。由舒尔不等式，

$$\sum x^3y^3-xyz(\sum x^2y+xy^2)+3x^2y^2z^2=\sum xy(xy-xz)(xy-yz)\geq 0,$$

所以③式右边≥ 0，② 式和①式最左侧的不等号成立。

（2）①式左数第二个不等号$\iff\sum a^3+3abc\geq\sum a^2c\iff$

$$\sum(x+y)^3+3\prod(x+y)\geq 2\sum(y+z)^2(x+y) \quad ④, \qquad \text{④式左边}-\text{右边}=2\sum x^3+6\sum x^2y$$

$$+6\sum xy^2+6xyz-2(\sum x^3+2\sum xy^2+3\sum xz^2+6xyz)=2\sum xy^2-6xyz\geq 0,$$

□

例 3.6. 设$\odot O$是$\triangle ABC$的外接圆，D是弧$\widehat{BC}$（不含A）上的一点，S是弧$\widehat{BAC}$的中点。P为线段SD上一点，过P作DB的平行线交AB于点E，过P作DC的平行线交AC于点F，过O作SD的平行线交弧$\widehat{BDC}$于点T。已知$\odot O$上的点Q满足$\angle QAP$被AT平分，求证：$QE=QF$。

证. $\dfrac{PD}{EB}=\dfrac{\sin\angle ABD}{\sin\angle SDB}=\dfrac{AD}{SB}$，同理，$\dfrac{PD}{CF}=\dfrac{AD}{SC}$。又因为$\angle PDA=\angle EBS=\angle FCS$, $SB=SC$，所以$\triangle PDA\backsim\triangle EBS\cong\triangle FCS$, $\angle SDQ=\angle SDT-\angle QDT=\pi-\angle OTD-\angle PAT=\dfrac{\pi}{2}+\angle DAT-\angle PAT=\dfrac{\pi}{2}-\angle PAD$, $\angle QSO-\dfrac{\pi}{2}-\angle SDQ=\angle PAD=\angle ESB=\measuredangle(EF,BC)$。因为$SO\perp BC$，所以$QS\perp EF$，因为$SE=SF$，所以$QS$是$EF$的中垂线，$QE=QF$。 □

例 3.7. 设四边形$APDQ$内接于圆Γ，过D作Γ的切线与直线AP,AQ分别交于B,C两点。延长PD交$\triangle CDQ$的外接圆于点X，延长QD交$\triangle BDP$的外接圆于点Y。设$\triangle DXY$的外接圆交BC于点D,E，求证：$BD=$

CE。

证. $\angle BYD = \angle DPA = \angle DQC$，所以$BY \parallel AC$，同理，$CX \parallel AB$。设$BY$与$CX$交于$A'$，则$ABA'C$为平行四边形，$\angle A' + \angle XDY = \angle A + \angle PDQ = \pi$，$D, X, A', Y$四点共圆。又因为$CQ \cdot AC = CD^2$，所以$BD \cdot BE = BY \cdot BA' = CQ \cdot \dfrac{BD}{CD} \cdot AC = BD \cdot CD$，$BE = CD$。 □

例 3.8. 设凸四边形$ABCD$满足$\angle ABC > \dfrac{\pi}{2}$，$\angle CDA > \dfrac{\pi}{2}$，$\angle DAB = \angle BCD$。记$E, F$分别为点$A$关于直线$BC, CD$的对称点。设线段$AE, AF$分别与直线$BD$交于点$K, L$。求证：$\triangle BEK$和$\triangle DFL$的外接圆相切。

证. 设$\angle ABD = B_1$，$\angle CBD = B_2$，$\angle ADB = D_1$，$\angle CDB = D_2$，$\angle ABC = B$，$\angle ADC = D$，$\triangle BEK$，$\triangle DFL$的外心分别为O_1, O_2，$\odot O_1, \odot O_2$的半径分别为r_1, r_2，则

$$r_1 = \frac{BE}{2\sin\angle BKE} = \frac{AB}{2\sin(\frac{\pi}{2} + B_2)} = \frac{AB}{2\cos B_2}, \qquad \text{同理，} r_2 = \frac{AD}{2\cos D_2},$$

设BK, DL的中点分别为U, V，则$O_1U = r_1\cos\angle BEK = r_1\cos(B - \dfrac{\pi}{2}) = r_1\sin B$，$BU = r_1\sin\angle BEK = -r_1\cos B$。同理，$O_2V = r_2\sin D$，$DV = -r_2\cos D$，

$$\begin{aligned} O_1O_2^2 = UV^2 + (O_2V - O_1U)^2 &= (BD - r_1\cos B - r_2\cos D)^2 + (r_1\sin B - r_2\sin D)^2 \\ &= r_1^2 + r_2^2 + BD^2 + 2r_1r_2\cos(B + D) - 2BD(r_1\cos B + r_2\cos D), \end{aligned}$$

只需证明上式右边$= (r_1 + r_2)^2$ ①。因为$B + D = 2\pi - 2A$，所以①式$\iff$

$$4r_1r_2\sin^2 A = BD^2 - 2BD(r_1\cos B + r_2\cos D) \quad ②, \qquad \text{由正弦定理，} \frac{BD}{\sin A} = \frac{AB}{\sin D_1} = \frac{AD}{\sin B_1},$$

$$\text{所以②式} \iff \frac{\sin B_1 \sin D_1}{\cos B_2 \cos D_2} \cdot \sin A = \sin A - \left(\frac{\sin D_1 \cos B}{\cos B_2} + \frac{\sin B_1 \cos D}{\cos D_2}\right),$$

$$\iff \sin A(\cos B_2\cos D_2 - \sin B_1 \sin D_1) = \sin D_1\cos D_2\cos B + \sin B_1 \cos B_2 \cos D, \qquad ③$$

$$\begin{aligned} \text{③式右边} &= \sin D_1\cos D_2(\cos B_1\cos B_2 - \sin B_1\sin B_2) + \sin B_1\cos B_2(\cos D_1\cos D_2 - \sin D_1\sin D_2) \\ &= \cos B_2\cos D_2\sin(B_1 + D_1) - \sin B_1\sin D_1\sin(B_2 + D_2) = \text{③式左边}, \end{aligned}$$

所以③, ②, ①式都成立，$O_1O_2 = r_1 + r_2$，$\odot O_1$与$\odot O_2$外切。 □

例 3.9. 不等边$\triangle ABC$的内切圆与边BC, CA, AB分别相切于点D, E, F。在$\triangle ABC$外部构造$\triangle APE$，$\triangle AQF$，使得$AP = PE$，$AQ = QF$，$\angle APE = \angle ACB$，$\angle AQF = \angle ABC$。设M是边BC的中点，请用$\triangle ABC$的三个内角来表示$\angle QMP$。

证. 因为$\angle QFA = \angle QAF = \dfrac{\pi - B}{2} = \angle BFD$，所以$Q, F, D$三点共线。同理，$P, E, D$三点共线。$QF = \dfrac{AF}{2\sin\frac{B}{2}} = 2R\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A}{2}$，同理，$PE = 2R\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{A}{2}$。$DF = 2BD\sin\dfrac{B}{2} = 2r\cos\dfrac{B}{2}$，同理，$DE = 2r\cos\dfrac{C}{2}$。$DQ = DF + FQ = 2R\sin\dfrac{C}{2}(\cos\dfrac{A}{2} + 2\sin\dfrac{A}{2}\sin B)$，$DP = 2R\sin\dfrac{B}{2}(\cos\dfrac{A}{2} + 2\sin\dfrac{A}{2}\sin C)$。设$D = \angle EDF = \dfrac{\pi - A}{2}$，$\alpha = \angle EDC = \dfrac{\pi - C}{2}$，我们证明$\tan\angle DQP = \tan\angle PMC$ ①。 □

例 3.10. 设锐角$\triangle ABC$的内心为I，点A所对的旁心为I_A。若$AB < AC$，设D为$\triangle ABC$内切圆与边BC的切点，直线AD直线BI_A, CI_A分别交于点E, F。求证：$\odot(AID)$与$\odot(AID)$，$\odot(I_AEF)$相切。

证. 设$\triangle AID$外接圆为ω，t_E, t_F, t_{I_A}分别为E, F, I_A到ω的切线长，$\angle BAD = \alpha$，$\angle CAD = \beta$。则由开世定理，只需证明$I_AF \cdot t_E + I_AE \cdot t_F = EF \cdot t_{I_A}$，即$\sin(\dfrac{B}{2}-\alpha)t_E + \sin(\dfrac{C}{2}-\beta)t_F = \sin\dfrac{B+C}{2}t_{I_A}$ ①。

$$t_E^2 = ED \cdot EA = BD \cdot \frac{\sin\frac{\pi-B}{2}}{\sin(\frac{B}{2}-\alpha)} \cdot AB \cdot \frac{\sin\frac{\pi+B}{2}}{\sin(\frac{B}{2}-\alpha)} = (p-b)c \cdot \frac{\cos^2\frac{B}{2}}{\sin^2(\frac{B}{2}-\alpha)},$$

$$\sin(\frac{B}{2}-\alpha)t_E = \sqrt{(p-b)c}\cos\frac{B}{2}, \qquad \text{同理，} \sin(\frac{C}{2}-\beta)t_F = \sqrt{(p-c)b}\cos\frac{C}{2},$$

$$t_{I_A}^2 = I_AI \cdot I_AA = \frac{a}{\sin\frac{\pi+A}{2}} \cdot \frac{p}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{pa}{\cos^2\frac{A}{2}}, \qquad \cos\frac{A}{2}t_{I_A} = \sqrt{pa},$$

$$\text{①式} \iff \sqrt{(p-b)c}\cos\frac{B}{2} + \sqrt{(p-c)b}\cos\frac{C}{2} = \sqrt{pa}, \qquad \text{②}$$

$$\frac{p-b}{p} = \frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}}{4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}} = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}, \qquad \sqrt{\frac{(p-b)c}{pa}} = \sqrt{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}\frac{\sin C}{\sin A}} = \frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}},$$

$$\text{同理，}\sqrt{\frac{(p-b)c}{pa}} = \frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}}, \qquad \frac{\text{②式左边}}{\text{②式右边}} = (\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2})/\cos\frac{A}{2} = 1,$$

所以②，①式成立，ω与$\triangle I_AEF$的外接圆相切。 □

例 3.11. 在$\triangle ABC$中，$\angle A$的平分线交BC于点D，交$\triangle ABC$的外接圆于点E。设K, L, M, N分别为AB, BD, DC, CA 的中点，P, Q分别是$\triangle EKL$，$\triangle EMN$的外心。求证：$\angle PEQ = A$。

证. $\angle PEA = \angle PEL - \angle LEA = \dfrac{\pi}{2} - \angle LKE - (\pi - \angle ELK) = \angle ELK - \angle LKE - \dfrac{\pi}{2}$，同理，$\angle QEA = \angle EMN = -\angle MNE - \dfrac{\pi}{2}$。$\angle PEQ = A \iff A = \angle ELK + \angle EMN - \angle LKE - \angle MNE - \dfrac{\pi}{2} = \angle ELM + \angle EML - \angle KEA - \angle NEA = \pi - \angle LEM - \angle KEN$ ①。设A, D关于E的对称点分别为A', D'，则$\angle LEM = \angle BD'C$, $\angle KEN = \angle BA'C$。因为$BE^2 = ED\cdot EA = ED'\cdot EA'$，所以$\triangle EBD' \backsim \triangle EA'B$，同理，$\triangle ECD' \backsim \triangle EA'C$，①式右边$= \pi - (\angle BD'E + \angle BA'E) - (\angle CD'E + \angle CA'E) = \pi - \angle BEA - \angle AEC = A$，①式成立。 □

例 3.12. 四边形$ABCD$外切于圆ω，设E是AC与ω的交点中离A较近的那一个，F是E在ω上的对径点。设ω过F的切线与直线AB, BC, CD, DA分别交于点P, Q, R, S。求证：$PQ = RS$。

证. □

例 3.13. 设O, H分别是锐角$\triangle ABC$的外心和垂心，Γ是其外接圆。延长AH, BH, CH分别交Γ于点A_1, B_1, C_1，过A_1, B_1, C_1分别作BC, CA, AB的平行线与Γ再交于点A_2, B_2, C_2。设M, N, P分别是AC_2与BC_1，BA_2与CA_1，CB_2与AB_1的交点。求证：$\angle MNB = \angle AMP$。

证. □

例 3.14. $\triangle ABC$中，I_A是点A所对的旁心。一个经过A, I_A的圆与AB, AC的延长线分别交于点X, Y。线段I_AB上一点S满足$\angle CSI_A = \angle AYI_A$，线段$I_AC$上一点$T$满足$\angle BTI_A = \angle AXI_A$。设$K$是$BT, CS$的交点，$Z$是$ST, I_AK$的交点。求证：$X, Y, Z$三点共线。

证. □

例 3.15 (2015,欧洲女奥)**.** 设H, G分别是锐角$\triangle ABC$ $(AB \neq AC)$的垂心和重心，直线AG与$\triangle ABC$的外接圆交于另一点P。设P'是点P关于直线BC的对称点。求证：$\angle A = \dfrac{\pi}{3}$当且仅当$HG = GP'$。

证. □

4 九点圆与欧拉线

例 4.1. 设锐角$\triangle ABC$的外心和垂心分别为O,H，求证：$\triangle AOH$，$\triangle BOH$，$\triangle COH$中有一个的面积等于另外两个面积之和。

证. □

例 4.2. 设$\triangle ABC$的外心，垂心分别为O,H。（1）求证：$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$。（2）设$\odot O$半径为$R$，求证：$OH<3R$，并证明右边的3不能改成更小的常数。

证. □

例 4.3. O,N分别为$\triangle ABC$的外心与九点圆圆心，S为$\triangle BOC$的外心。求证：AS,AN关于$\angle A$的平分线对称。

证. 因为$\dfrac{HN}{HO}=\dfrac{HM}{HA}=\dfrac{1}{2}$，所以$MN/\!/AO$，又因为$OS/\!/AH$，所以$\angle AMN=\pi-\angle MAO=\angle AOS$。由正弦定理，$\dfrac{AO}{OS}=\dfrac{BO}{OS}=2\sin\angle BCO=2\cos A$。又因为$\dfrac{AM}{MN}=\dfrac{AH}{AO}=2\cos A=\dfrac{AO}{OS}$，所以$\triangle AOS\backsim\triangle AMN$，$\angle BAS=\angle BAO+\angle OAS=\angle CAH+\angle HAN=\angle CAN$。 □

例 4.4. 设H为$\triangle ABC$的垂心，L为BC边的中点，P为AH的中点。过L作PL的垂线交AB于G，交AC的延长线于K。求证：G,B,K,C四点共圆。

证. □

例 4.5. 点H是$\triangle ABC$的垂心，点X,Y,Z分别在线段BC,CA,AB上，$\triangle XYZ\backsim\triangle ABC$。点$P,S$分别是$\triangle XYZ$的垂心和外心。求证：$PS=SH$。

证. $\angle YAZ=\angle YXZ=\pi-\angle YPZ$，所以$A,Y,P,Z$四点共圆。同理，$B,Z,P,X$四点共圆，$C,X,P,Y$四点共圆，$\angle PCX=\angle PYX=\dfrac{\pi}{2}-\angle YXZ=\angle PZX=\angle PBX$，所以$PB=PC$，同理，$PA=PB=PC$。设$P$为$\triangle ABC$的外心，$BC,CA,AB$中点分别为 L,M,N，则$\triangle XYZ\backsim\triangle ABC\backsim\triangle LMN$，$P$为$\triangle LMN$的垂心。所以$\angle NPL=\pi-\angle NML=\pi-B=\angle ZPX$，$\angle XPL=\angle ZPN$，同理，$\angle ZPN=\angle YPM$，设$PH$中点为$U$，则$U$是$\triangle LMN$的外心，所以$\triangle PXL\backsim\triangle PYM\backsim\triangle PYM\backsim\triangle PZN\backsim\triangle PSU$，$\angle PUS=\angle PLX=\frac{\pi}{2}$，由$PU=UH$知$PS=SH$。 □

例 4.6. 点O是$\triangle ABC$的外心，$\triangle ABC$的两条高BE和CF相交于H，直线OH与EF相交于P。线段OK是$\odot(OEF)$的直径。求证：A,K,P三点共线。

证. $\angle AFK=\dfrac{\pi}{2},\angle HFK=\angle OFH,\angle EFK=\dfrac{\pi}{2}-\angle OFE,\angle FEK=\dfrac{\pi}{2}-\angle DEF,\angle AEK=\dfrac{\pi}{2}-\angle AEO=\angle OEH$。设 $\angle FAK=\alpha,\angle EAL=\beta$，由角元塞瓦定理，

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin\angle AFK}{\sin\angle EFK}\cdot\frac{\sin\angle FEK}{\sin\angle AEK}=\frac{\sin\angle OFH}{\cos\angle OFE}\cdot\frac{\cos\angle OEF}{\sin\angle OEH},\qquad ①$$

设$\alpha'=\angle FAP$，$\beta'=\angle EAP$，则$\alpha,\beta,\alpha',\beta'\in(0,\pi)$。我们证明$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{\sin\alpha'}{\sin\beta'}$ ②。因为

$$\frac{FP}{EP}=\frac{AF\sin\alpha'}{AE\sin\beta'}\ ③,\qquad \frac{AF}{AE}=\frac{b}{c},\qquad \frac{FP}{EP}=\frac{[FOH]}{[EOH]}=\frac{FH\cdot OF\sin\angle OFH}{EH\cdot OE\sin\angle OEH},\quad ④$$

所以由①,③,④式，我们有

$$\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'}=\frac{c\cdot FH\cdot OF\sin\angle OFH}{b\cdot EH\cdot OE\sin\angle OEH},\qquad ②式\Longleftrightarrow 1=\frac{\cos\angle OFE\cdot c\cdot FH\cdot OF\sin\angle OFH}{\cos\angle OEF\cdot b\cdot EH\cdot OE\sin\angle OEH},\quad ⑤$$

我们有$\dfrac{FH}{EH}=\dfrac{\sin\angle HEF}{\sin\angle HFE}=\dfrac{\cos B}{\cos C}$ ⑥。因为$AO\perp EF$，所以

$$\frac{OF\cos\angle OFE}{OE\cos\angle OEF}=\frac{[AFO]}{[AEO]}=\frac{AF\sin\angle OAF}{AE\sin\angle OAE}=\frac{b\cos C}{c\cos B},\qquad ⑦$$

由⑥,⑦式知⑤式，②式成立。又因为$\alpha-\beta=\alpha'-\beta'=A\neq 0$，所以$\alpha=\alpha'$，$\beta=\beta'$，$A,K,P$三点共线。 □

例 4.7 (费尔巴哈定理)**.** 设$\triangle ABC$的九点圆为$\odot N$，内切圆为$\odot I$。求证：（1）$\odot N$与$\odot I$内切。（2）类似地，设$\triangle ABC$三个顶点A,B,C所对的旁切圆分别为$\odot I_A,\odot I_B,\odot I_C$，则$\odot N$分别与$\odot I_A,\odot I_B,\odot I_C$外切。

证. （1）设$\triangle ABC$外心为O，垂心为H，重心为G。只需证明$O_1I=\dfrac{R}{2}-r$ ①。设$p=\dfrac{a+b+c}{2}$，$x=p-a$，$y=p-b$，$z=p-c$，则由G,I的重心坐标，我们有

$$\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC},\qquad \overrightarrow{OI}=\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA}+\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC},$$

$$\overrightarrow{IO_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2p}(x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC})\quad ②,\qquad 因为\frac{x}{p}=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2},$$

$$\frac{y}{p}=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2},\qquad \frac{z}{p}=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2},\qquad 所以②式右边=\frac{1}{2}\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\overrightarrow{OA},$$

$$IO_1^2=\frac{R^2}{4}[\sum\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}+2\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}\cos 2C],\qquad ③$$

这里用到$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=R^2\cos 2C$。因为$\cos 2C=1-2\sin^2 C$，所以

$$③式右边括号内=(\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2})^2-4\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}(\sum\tan\frac{C}{2}\sin^2 C),\qquad ④$$

$$因为\tan\frac{C}{2}\sin^2 C=(1-\cos C)\sin C=\sin C-\frac{1}{2}\sin 2C,$$

$$所以\sum\tan\frac{C}{2}\sin^2 C=\sum\sin C-\frac{1}{2}\sum\sin 2C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-2\sin A\sin B\sin C,$$

$$又因为\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1,\qquad \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\sin A\sin B\sin C=8\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}$$

$$所以④式右边=1-16\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+64\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}=(1-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2})^2,$$

于是$IO_1=\dfrac{R}{2}(1-8\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2})=\dfrac{R}{2}-r$，①式成立。 □

5 几何小测-2

例 5.1. 设$\triangle ABC$中边AB的中点为N，$\angle A>\angle B$，D为射线AC上一点，满足$CD=BC$，P为射线DN上一点，且与点A在BC同侧，满足$\angle PBC=\angle A$，PC与AB交于点E，BC与DP交于点T，求$\dfrac{BC}{TC}-\dfrac{EA}{EB}$。

证. 设直线BP交AC于J点，由梅涅劳斯定理，

$$\frac{BT}{TC}=\frac{AD}{DC}=\frac{b+a}{a},\qquad \frac{AE}{EB}=\frac{AC}{CJ}\cdot\frac{JP}{PB}=\frac{AC}{CJ}\cdot\frac{JD}{DC}\cdot\frac{CT}{TB}$$
$$=\frac{b}{a^2/b}\cdot\frac{a^2/b+a}{a}\cdot\frac{a}{a+b}=\frac{b}{a},\qquad \text{所以}\frac{BC}{TC}-\frac{EA}{EB}=\frac{b}{a}+2-\frac{b}{a}=2,$$

□

例 5.2. $\triangle ABC$中，E是AC边上一点，G线段BE上一点。$\odot O$经过A和G，且与BE相切，延长CG与$\odot O$相交于K。求证：$CG\cdot GK=AG^2\cdot\dfrac{CE}{EA}$。

证. □

例 5.3. 在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，在过A且平行于BC的直线上取两点D,E。直线BD与CE相交于F，$\triangle ABE$的外接圆与$\triangle ACD$的外接圆相交于A,G两点。求证：A,F,G三点共线。

证. □

例 5.4. $\triangle ABC$的内切圆$\odot I$分别与BC,CA,AB相切于点D,E,F，AD与EF相交于G，点O,O_1,O_2分别是$\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle ACD$的外心，M是O_1O_2的中点。求证：$OM/\!/IG$。

证. □

例 5.5.

证. □

6 复数的定义和性质

例 6.1. (1) 求证：$a\times b$的长方形可以用$1\times n$的长条覆盖，当且仅当$n\mid a$ 或 $n\mid b$;
(2) 空间中$a\times b\times c$的盒子可以用$n\times 1\times 1$的长条装满，求证：$n\mid a$ 或 $n\mid b$ 或 $n\mid c$。

证. (1) 假设$a\times b$的长方形可以用$1\times n$的长条覆盖。设$\omega=\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{n}}$为$n$次单位方根，给大长方形每格按行列数建立坐标，给坐标为(p,q), $1\le p\le a$, $1\le q\le b$的格子赋值ω^{p+q}。设某个$1\times n$的长条盖住的左上角方格坐标为(p_0,q_0)，则该长条覆盖的格子中的数之和为$\omega^{p_0+q_0}(1+\omega+\omega^2+...+\omega^{n-1})=0$，所以大长方形中所有数之和为0，

$$0=\sum_{p=1}^{a}\sum_{q=1}^{b}\omega^{p+q}=(\sum_{p=1}^{a}\omega^p)(\sum_{q=1}^{b}\omega^q)=\omega\cdot\frac{1-\omega^a}{1-\omega}\cdot\omega\cdot\frac{1-\omega^b}{1-\omega},\qquad (1-\omega^a)(1-\omega^b)=0,$$

所以$1-\omega^a=0$或$1-\omega^b=0$。因为$1-\omega^m=0\Longleftrightarrow n\mid m$，所以$n\mid a$或$n\mid b$。
(2) 给坐标为(p,q,r), $1\le p\le a$, $1\le q\le b$, $1\le r\le c$的格子赋值ω^{p+q+r}，则每个长条盖住的格子中的数之和为0，盒子中所有数之和为0，

$$0=\sum_{p=1}^{a}\sum_{q=1}^{b}\sum_{r=1}^{c}\omega^{p+q+r}=(\sum_{p=1}^{a}\omega^p)(\sum_{q=1}^{b}\omega^q)(\sum_{r=1}^{c}\omega^r)=\omega\cdot\frac{1-\omega^a}{1-\omega}\cdot\omega\cdot\frac{1-\omega^b}{1-\omega}\cdot\omega\cdot\frac{1-\omega^c}{1-\omega},$$

所以$(1-\omega^a)(1-\omega^b)(1-\omega^c)=0$，$1-\omega^a=0$或$1-\omega^b=0$或$1-\omega^c=0$，$n\mid a$或$n\mid b$或$n\mid c$。 □

例 6.2. 设$x,y,z>0$，求证：$\sum xy\sqrt{x^2+y^2+xy}\ge\prod\sqrt{x^2+y^2+xy}$ ①。

证. 法一：设$a=x,\ b=y\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}},\ c=z\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}$，则$|a|=x,\ |b|=y,\ |c|=z$。由余弦定理，

$$|a-b|=\sqrt{x^2+y^2+xy},\qquad |b-c|=\sqrt{y^2+z^2+yz},\qquad |c-a|=\sqrt{z^2+x^2+zx},$$

$$\begin{aligned}①式左边&=|ab(a-b)|+|bc(b-c)|+|ca(c-a)|\ge|ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)|\\&=|(a-b)(b-c)(a-c)|=①式右边,\end{aligned}$$

所以①式成立。考察它的等号成立条件，

法二：原式$\Longleftrightarrow(\sum xy\sqrt{x^2+y^2+xy})^2\ge\prod(x^2+y^2+xy)$ ②。

$$②式左边=\sum x^2y^2(x^2+y^2+xy)+2xyz\sum\sqrt{(x^2+y^2+xy)(x^2+z^2+xz)}\cdot x,$$

$$\begin{aligned}②式右边&=(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)+\sum xy(z^2+y^2)(z^2+x^2)+\sum x^2yz(y^2+z^2)+x^2y^2z^2\\&=\sum x^4(y^2+z^2)+\sum x^3y^3+\sum xyz^2(x^2+y^2+z^2)+xyz\sum x(y^2+z^2)+3x^2y^2z^2,\end{aligned}$$

$$②式左边-右边=xyz(2\sum x\sqrt{(x^2+y^2+xy)(x^2+z^2+xz)}-(\sum x)(\sum x^2)-\sum x(y^2+z^2)-3xyz),\quad ③$$

$$\begin{aligned}由柯西不等式，\sqrt{(x^2+y^2+xy)(x^2+z^2+xz)}&=\frac{1}{2}\sqrt{(x^2+y^2+(x+y)^2)(x^2+z^2+(x+z)^2)}\\&\ge\frac{1}{2}(x^2+yz+(x+y)(x+z))=x^2+yz+\frac{x(y+z)}{2},\qquad ④\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}所以③式右边括号&\ge2\sum x(x^2+yz+\frac{x}{2}(y+z))-\sum x^3-2\sum x(y+z)-3xyz\\&=\sum x^3-\sum x(y+z)+3xyz=\sum x(x-y)(x-z)\ge0,\end{aligned}$$

上式最右边使用了Schur不等式。

注：④式也可由$\sqrt{(x^2+y^2+xy)(x^2+z^2+xz)}=\sqrt{((x+\frac{y}{2})^2+\frac{3}{4}y^2)((x+\frac{z}{2})^2+\frac{3}{4}z^2)}\ge(x+\frac{y}{2})(x+\frac{z}{2})+\frac{3}{4}yz=x^2+yz+\frac{x(y+z)}{2}$得到。 □

例 6.3. 求最小的实数c，使得对任意正整数$n\ge2$和任意n个和为0的非零复数$z_1,z_2,...,z_n$，均存在下标$i\ne j$，使得$|z_i^2+z_j^2|\le c|z_iz_j|$。

解. c最小为$\frac{5}{2}$。原命题即对任意正整数$n\ge2$和n个和为0的非零复数$z_1,z_2,...,z_n$，都有$c\ge\min_{i\ne j}\frac{|z_i^2+z_j^2|}{|z_iz_j|}$。

（1）$c=\frac{5}{2}$时，我们证明原命题成立。设$z_1,z_2,...,z_n\in\mathbb{C},\sum_{i=1}^n z_i=0$。不妨设$|z_1|\ge|z_2|\ge...\ge|z_n|$，若存在$1\le i\le n-1$，使得$|z_{i+1}|\ge\frac{1}{2}|z_i|$，令$j=i+1$，则

$$0\ge(|z_i|-\frac{1}{2}|z_j|)(|z_i|-2|z_j|)=|z_i|^2+|z_j|^2-\frac{5}{2}|z_iz_j|,\qquad |z_i^2+z_j^2|\le|z_i|^2+|z_j|^2\le\frac{5}{2}|z_iz_j|,$$

原命题成立。否则对任意$1\le i\le n-1$，都有$|z_{i+1}|\le\frac{1}{2}|z_i|$。所以$2\le i\le n$时，有$|z_i|\le\frac{1}{2^{i-1}}|z_1|$，$|z_1|=|-\sum_{i=2}^n z_i|\le\sum_{i=2}^n|z_i|<(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{2^i})|z_1|<|z_1|$，矛盾！

（2）再证明$c<\frac{5}{2}$时，原命题不成立。设$n\ge2$，$f_n(t)=\sum_{i=1}^{n-1}t^i,t\in\mathbb{R}_+$，则$f_n(t)$严格单调增且连续，$f_n(\frac{1}{2})=1-2^{1-n}<1$，$f_n(1)=n-1\ge1$，所以在区间$(\frac{1}{2},1]$上存在唯一的$\lambda_n$满足方程$f_n(\lambda_n)=1$。令$z_1=1$，$2\le i\le n$时，令$z_i=-\lambda_n^{i-1}$，则$\sum_{i=1}^n z_i=1-f_n(\lambda_n)=0$。对任意$1\le i,j\le n,i\ne j$，$\frac{|z_i^2+z_j^2|}{|z_iz_j|}=$

$|\frac{z_i}{z_j}+\frac{z_j}{z_i}|=\lambda_n^{i-j}+\lambda_n^{j-i}\geq\lambda_n+\frac{1}{\lambda_n}$，$|i-j|=1$时等号成立，于是$\min_{i\neq j}\frac{|z_i^2+z_j^2|}{|z_iz_j|}=\lambda_n+\frac{1}{\lambda_n}$。设$m>n\geq 2$，则$1=f_m(\lambda_m)=f_n(\lambda_n)<f_m(\lambda_n)$，由$f_m$的单调性知$\lambda_m<\lambda_n$，数列$\{\lambda_n\}_{n\geq 2}$单调减。特别地，$n\geq 3$时，$\lambda_n\leq\lambda_3=\frac{\sqrt{5}-1}{2}<1$。$1=f_n(\lambda_n)=\frac{\lambda_n-\lambda_n^n}{1-\lambda_n}$，$1<2\lambda_n=1+\lambda_n^n\leq 1+\lambda_3^n$。因为$\lim_{n\to\infty}\lambda_3^n=0$，由夹逼定理，$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\frac{1}{2}$。于是$\lim_{n\to\infty}\lambda_n+\frac{1}{\lambda_n}=\frac{5}{2}$，存在充分大的$n$使得 $c<\lambda_n+\frac{1}{\lambda_n}$，上述例子说明原命题不成立。

综上所述，c最小为$\frac{5}{2}$。 □

例 6.4 (拿破仑定理)**.** 以任意三角形的三边为底边向外（或向内）作三个正三角形，则这三个正三角形的中心构成正三角形。

证. 我们先考虑向外作三个正三角形的情况。法一（复数法）：设$\alpha=\frac{1}{2}+\frac{i}{2\sqrt{3}}$, $\overline{\alpha}=\frac{1}{2}-\frac{i}{2\sqrt{3}}=1-\alpha$，并以小写的$a$代表点$A$对应的复数，其他点同理。则

$$p-c=\alpha(b-c),\qquad p=\alpha b+\overline{\alpha}c,\qquad \text{同理，}q=\alpha c+\overline{\alpha}a,\qquad r=\alpha a+\overline{\alpha}b,$$

设$\omega=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$\overline{\omega}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=1-\omega$，我们证明$r-p=\omega(q-p)$，即$r=\omega q+\overline{\omega}p\iff\alpha a+\overline{\alpha}b=\omega(\alpha c+\overline{\alpha}a)+\overline{\omega}(\alpha b+\overline{\alpha}c)$ ①。因为$\omega\overline{\alpha}=\alpha$, $\overline{\omega}\alpha=\overline{\alpha}$, $\omega\alpha+\overline{\omega\alpha}=\frac{i}{\sqrt{3}}-\frac{i}{\sqrt{3}}=0$，所以①式成立。

法二（三角法）：在$\triangle AQR$中，$AQ=\frac{b}{\sqrt{3}}$, $AR=\frac{c}{\sqrt{3}}$, $\angle QAR=A+\frac{\pi}{3}$。由余弦定理，我们有

$$QR^2=\frac{1}{3}(b^2+c^2-2bc\cos(A+\frac{\pi}{3}))=\frac{1}{3}(b^2+c^2-2bc\cdot\frac{\cos A-\sqrt{3}\sin A}{2})=\frac{1}{3}(b^2+c^2$$
$$-bc(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-\sqrt{3}\sin A))=\frac{1}{3}(\frac{b^2+c^2+a^2}{2}+\sqrt{3}bc\sin A)=\frac{a^2+b^2+c^2}{6}+\frac{2[ABC]}{\sqrt{3}},$$

这是关于a,b,c的对称式，同理可得$PQ^2=PR^2=$上式右边$=QR^2$，所以$\triangle PQR$是正三角形。

向内作三个正三角形的证明如下: □

例 6.5 (2024，高联预赛广西)**.** 如图，$AD=CD$，$DP=EP$，$BE=CE$，$\angle ADC=\angle DPE=\angle BEC=\frac{\pi}{2}$。求证：$P$为线段$AB$的中点。

证. 以小写的a代表点A对应的复数，其他点同理。我们有

$$a-d=\mathrm{i}(c-d),\quad (1-\mathrm{i})d=a-ic,\quad d=\frac{1+\mathrm{i}}{2}a+\frac{1-\mathrm{i}}{2}c,$$
$$\text{同理，}c-e=\mathrm{i}(b-e),\quad e=\frac{1+\mathrm{i}}{2}c+\frac{1-\mathrm{i}}{2}b,\qquad e-p=\mathrm{i}(d-p),$$
$$p=\frac{1+\mathrm{i}}{2}e+\frac{1-\mathrm{i}}{2}d=\frac{1+\mathrm{i}}{2}(\frac{1+\mathrm{i}}{2}c+\frac{1-\mathrm{i}}{2}b)+\frac{1-\mathrm{i}}{2}(\frac{1+\mathrm{i}}{2}a+\frac{1-\mathrm{i}}{2}c)=\frac{a+b}{2}+(\frac{\mathrm{i}}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2})c=\frac{a+b}{2},$$

所以P是线段AB的中点。 □

例 6.6 (托勒密不等式)**.** 在任意凸四边形$ABCD$中，求证：$AB\cdot CD+AD\cdot BC\geq AC\cdot BD$ ①，并说明等号成立当且仅当A,B,C,D四点共圆。

证. 由三角不等式，①式左边$=|a-b|\cdot|c-d|+|a-d|\cdot|b-c|\geq|(a-b)(c-d)+(a-d)(b-c)|=|(a-c)(b-d)|=$①式右边，所以①式成立。等号成立当且仅当$\arg((a-b)(c-d))=\arg((a-d)(b-c))$，即$\arg(\dfrac{a-b}{a-d})=\arg(\dfrac{c-d}{b-c})\Longleftrightarrow\angle BAD+\angle BCD=\pi\Longleftrightarrow A,B,C,D$四点共圆。 □

例 6.7 (爱可尔斯定理)**.** （1）若$\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2$都是正三角形且定向相同，则线段A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2的中点A,B,C也构成正三角形。（2）若$\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2$，$\triangle A_3B_3C_3$都是正三角形且定向相同，则$\triangle A_1A_2A_3$，$\triangle B_1B_2B_3$，$\triangle C_1C_2C_3$的重心也构成正三角形。

证. □

例 6.8. 点A在凸四边形$SBCD$的内部，$AB=BC$，$AD=CD$，$\angle ASD=\angle BSC$。求证：$\dfrac{BS}{DS}=\dfrac{AB}{AD}$。

证. 设AC交BD于O，以O为原点，$\overrightarrow{OD}$为实轴正半轴建立复平面，以点记号的小写字母表示它对应的复数，则$c=\overline{a}$，$b,d\in\mathbb{R}$，$a+\overline{a}=0$。

$$\begin{gathered}
\angle ASD=\angle BSC\Longleftrightarrow\frac{(d-s)(b-s)}{(a-s)(c-s)}\in\mathbb{R}\Longleftrightarrow\frac{(d-s)(b-s)}{(a-s)(\overline{a}-s)}=\frac{(d-\overline{s})(b-\overline{s})}{(\overline{a}-\overline{s})(\overline{c}-\overline{s})},\\
\Longleftrightarrow(|a|^2+\overline{s}^2)(bd-(b+d)s+s^2)=(|a|^2+s^2)(bd-(b+d)\overline{s}+\overline{s}^2),\qquad ①\\
\Longleftrightarrow|a|^2((b+d)(\overline{s}-s)+s^2-\overline{s}^2)=bd(s^2-\overline{s}^2)+(b+d)(\overline{s}-s)|s|^2,\qquad\text{因为}\overline{s}-s\neq0\text{，所以}\\
\Longleftrightarrow|a|^2(b+d-(s+\overline{s}))=-bd(s+\overline{s})+(b+d)|s|^2\quad ②,\qquad\text{设}s=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R},\\
b+d\neq0\text{时，②式}\Longleftrightarrow x^2+y^2+(|a|^2-bd)\cdot\frac{2x}{b+d}-|a|^2=0,\qquad ③
\end{gathered}$$

要证$\dfrac{|s-b|}{|s-d|}=\dfrac{|a-b|}{|a-d|}$ ④，即$|s-b|^2|a-d|^2=|s-d|^2|a-b|^2$，

$$\begin{gathered}
\Longleftrightarrow(|s|^2-b(s+\overline{s})+b^2)(|a|^2+d^2)=(|s|^2-d(s+\overline{s})+d^2)(|a|^2+b^2),\\
\Longleftrightarrow|s|^2(d^2-b^2)+|a|^2(b^2-d^2)+|a|^2(s+\overline{s})(d-b)+bd(b-d)(s+\overline{s})=0,\\
\Longleftrightarrow|s|^2(d+b)+|a|^2(s+\overline{s}-b-d)-bd(s+\overline{s})=0,\qquad\text{即②式},
\end{gathered}$$

所以④式成立，$\dfrac{BS}{DS}=\dfrac{AB}{AD}$。注：$BO\neq DO$，即$b+d\neq0$时，③式就是到$B,D$两点距离比为$\dfrac{AB}{AD}$的阿氏圆的方程。 □

7 进阶思维摸底考试

例 7.1. 已知直线$y=x$与抛物线$E:x^2=4y$交于A,B两点，C为抛物线E上的一点，且满足$\triangle ABC$的外接圆与抛物线E在点C处相切。求C点坐标。

证. □

例 7.2. 已知实数a,b,c,d,e满足下列条件：$a\leq b\leq c\leq d\leq e$，$a+e=1$，$b+c+d=3$，$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=14$。求$ae$的最大值和最小值。

证. 求ae的最大值，即求e的最小值，$a=b=-1$，$c=d=e=2$时符合题意，下证$e\geq2$。反证法：假设$e<2$，则$a>-1$，$-1<b\leq c\leq d<2$。因为x^2是下凸函数，所以$b^2+c^2+d^2<(1-c)^2+c^2+2^2<(-1)^2+2^2+2^2=9$（这里作了两次调整），但$a^2+e^2<5$，$b^2+c^2+d^2>14-5=9$，矛盾！所以$e_{\min}=2$，$(ae)_{\min}=-2$。 □

例 7.3. 设$\triangle ABC$的内心为I，点A对应的旁心为I_A，$\triangle ABC$的内切圆分别与直线BC, CA, AB切于点D, E, F，直线EF, BC交于点P，X为线段PD的中点。求证：$XI \perp DI_A$。

证. 设$\odot I_A$在BC边上的切点为D'，要证$\angle IXD = \angle DI_AD'$ ①。由梅涅劳斯定理，$= \dfrac{BP}{PC} = \dfrac{BF}{FA} \cdot \dfrac{AE}{EC} = \dfrac{BF}{EC} = \dfrac{p-b}{p-c}$，又因为$CP - BP = a$，所以$BP = a \cdot \dfrac{p-b}{b-c}$，$CP = a \cdot \dfrac{p-c}{b-c}$。

$$PD = PB + BD = (p-b)(\frac{a}{b-c} + 1) = \frac{2(p-b)(p-c)}{b-c}, \qquad XD = \frac{PD}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{b-c}$$
$$\text{①式} \iff \frac{ID}{XD} = \frac{DD'}{I_AD'} \iff \frac{r(b-c)}{(p-b)(p-c)} = \frac{b-c}{r_A} \iff \frac{r}{p-b} = \frac{p-c}{r_A}, \qquad \text{②}$$

因为$\dfrac{r}{p-b} = \dfrac{ID}{BD} = \tan\dfrac{B}{2} = \dfrac{BD'}{I_AD'} = \dfrac{p-c}{r_A}$，所以②式，①式成立，$XI \perp DI_A$。 □

例 7.4. 求所有的正整数$n \geq 2$，使得存在实数$a_1, a_2, ..., a_n$，满足如下条件：（1）$\sum_{i=1}^n a_i = 0$；（2）$\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$；（3）$\sum_{i=1}^n a_i^3 = 2b - \dfrac{2}{\sqrt{n}}$，其中$b = \max_{1\leq i\leq n}(a_i)$。

证. 设$c < b$为待定常数，则对任意$x \leq b$，有$(x-b)(x-c)^2 \leq 0$，即$x^3 \leq (b+2c)x^2 - (c^2+2bc)x + bc^2$。上式中令$x = a_1, a_2, ..., a_n$再求和，得

$$\sum_{i=1}^n a_i^3 \leq (b+2c)\sum_{i=1}^n a_i^2 - (c^2+2bc)\sum_{i=1}^n a_i + nbc^2 = b + 2c + nbc^2, \qquad \text{①}$$

对固定的b，令$c = -\dfrac{1}{nb}$，此时$c < 0 < b$且①式右边取最小值。于是

$$\text{①式} \iff b - \frac{1}{nb} \geq 2b - \frac{2}{\sqrt{n}} \iff b - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{nb} \leq 0 \iff (\sqrt{n}b - 1)^2 \leq 0,$$

所以$b = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$，$c = -\dfrac{1}{nb} = -\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，此时①式等号成立，所有$a_i$，$1 \leq i \leq n$只能取$\dfrac{1}{\sqrt{n}}$或$-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$。因为$\sum_{i=1}^n a_i = 0$，所以$n$只能为偶数。此时对$1 \leq i \leq \dfrac{n}{2}$，令$a_i = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$，对$\dfrac{n}{2} + 1 \leq i \leq n$，令$a_i = -\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，容易验证三个题设条件都满足。于是所有满足条件的$n(n \geq 2)$为所有正偶数。 □

8 三角法练习-1

例 8.1. P在$\triangle ABC$内，满足$\angle ABP = 10°$，$\angle CBP = 40°$，$\angle ACP = 20°$，$\angle BCP = 30°$。试求$\angle BAP$的度数。

证. 设$\angle BAP = \alpha$，$\angle CAP = 80° - \alpha$，由角元塞瓦定理，

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(80°-\alpha)} = \frac{\sin 10°}{\sin 40°} \cdot \frac{\sin 30°}{\sin 20°} = \frac{1}{2\sin 40° \cdot 2\cos 10°} = \frac{1}{2(\sin 30° + \sin 50°)},$$
$$(1 + 2\sin 50°)\sin\alpha = \sin 80°\cos\alpha - \cos 80°\sin\alpha, \qquad \tan\alpha = \frac{\sin 80°}{1 + \cos 80° + 2\sin 50°}$$
$$= \frac{\sin 80°}{2\cos^2 40° + 2\cos 40°} = \frac{\sin 40°}{\cos 40° + 1} = \tan 20°, \qquad \alpha = 20°,$$

□

例 8.2. 点D,E,F分别在$\triangle ABC$的边BC,CA,AB上，AD,BE,CF交于一点。点G_1,G_2,G_3分别是$\triangle AEF$，$\triangle BDF$，$\triangle CDE$的重心。求证：三直线AG_1,BG_2,CG_3交于一点。

证. 因为AG_1是$\triangle AEF$的中线，所以

$$\frac{\sin\angle FAG_1}{\sin\angle EAG_1}=\frac{AE}{AF},\qquad \text{同理},\quad \frac{\sin\angle ECG_3}{\sin\angle DCG_3}=\frac{CD}{CE},\qquad \frac{\sin\angle DBG_2}{\sin\angle FBG_2}=\frac{BF}{BD},$$

由塞瓦定理，上述三式左边乘积 $=$ 上述三式右边乘积 $=1$。由角元塞瓦定理知AG_1,BG_2,CG_3交于一点。 □

例 8.3. 点P,Q,R与$\triangle ABC$在同一平面上，直线AQ与AR关于$\angle BAC$的平分线对称，直线BR与BP关于$\angle ABC$的平分线对称，直线CP与CQ关于$\angle ACB$的平分线对称。求证：直线AP,BQ,CR交于一点。

证. 由正弦定理，$\dfrac{\sin\angle BAP}{BP}=\dfrac{\sin\angle ABP}{AP}$，$\dfrac{\sin\angle CAP}{CP}=\dfrac{\sin\angle ACP}{AP}$，$\dfrac{BP}{CP}=\dfrac{\sin\angle BCP}{\sin\angle CBP}$，

$$\text{所以}\frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle CAP}=\frac{\sin\angle ABP}{\sin\angle ACP}\cdot\frac{\sin\angle BCP}{\sin\angle CBP}\qquad ①,\quad \text{同理},$$

$$\frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle CAP}=\frac{\sin\angle ABP}{\sin\angle ACP}\cdot\frac{\sin\angle BCP}{\sin\angle CBP}\qquad ②,\qquad \frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle CAP}=\frac{\sin\angle ABP}{\sin\angle ACP}\cdot\frac{\sin\angle BCP}{\sin\angle CBP}\qquad ③,$$

因为$\angle ABP=\angle CBR$，$\angle BCQ=\angle ACP$，$\angle CAR=\angle BAQ$，$\angle BCP=\angle ACQ$，$\angle CAQ=\angle BAR$，$\angle ABR=\angle CBP$，所以

$$\frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle CAP}\cdot\frac{\sin\angle CBQ}{\sin\angle ABQ}\cdot\frac{\sin\angle ACR}{\sin\angle BCR}=①②③\text{式右边乘积}=1,$$

由角元塞瓦定理知AP,BQ,CR交于一点。注：其实可以直接在$\triangle ABC$中由角元塞瓦定理得到①式。 □

例 8.4. AB是半圆$\odot O$的直径，C是OB的中点，四边形$BCDE$是矩形，点F在半圆$\odot O$上，$AF/\!/CE$。过F作半圆$\odot O$的切线与直径AD相交于P。求证：$BD\perp BP$。

证. 设$\angle ECB=\alpha$，过B点作BD的垂线BQ，我们证明AP,FP,BQ三线共点。在$\triangle ABF$中，由角元塞瓦定理，这等价于$\dfrac{\sin\angle AFP}{\sin\angle BFP}\cdot\dfrac{\sin\angle FBQ}{\sin\angle ABQ}\cdot\dfrac{\sin\angle BAP}{\sin\angle FAP}=1\iff\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)}\cdot\dfrac{OD}{AO}=1$ ①。这里用到$\angle FBQ=\angle ABQ-\angle ABF=\dfrac{\pi}{2}+\alpha-(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)=2\alpha$，$\dfrac{\sin\angle BAP}{\sin\angle FAP}=\dfrac{\sin\angle OAD}{\sin\angle ODA}=\dfrac{OD}{AO}$。①式左边$=2\cos\alpha\cdot\dfrac{OD}{2OC}=1$，①式成立，$BP\perp BD$。 □

例 8.5. $\triangle ABC$的内切圆$\odot I$分别与AB,AC相切于F,E，AD为$\triangle ABC$的内角平分线，点J,K分别是$\triangle ABD$，$\triangle ACD$的内心。求证：$\angle IFJ=\angle KEC$。

证. 因为B,J,I三点共线，所以$\tan\angle IFJ=\frac{\sin\angle IFJ}{\sin\angle BFJ}=\frac{IJ}{BJ}\cdot\frac{BF}{IF}$ ①。

$$\frac{IJ}{BJ}=\frac{AD}{AB+BD}=\frac{\sin B}{\sin(C+\frac{A}{2})+\sin\frac{A}{2}}=\frac{\sin B}{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}},\qquad \frac{BF}{IF}=\cot\frac{B}{2}$$

所以$\tan\angle IFJ=$①式右边$=\dfrac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$。同理，$\cot\angle KEC=\tan\angle IEK=\dfrac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}=\cot\angle IFJ$。所以$\angle IFJ=\angle KEC$。 □

例 8.6. $\triangle ABC$内接于圆ω，过B,C两点分别作ω的切线，与过A作ω的切线相交于点P,Q，$AH\perp BC$于H。求证：$\angle AHP=\angle AHQ$。

证. 因为$\dfrac{\sin\angle AHP}{AP}=\dfrac{\sin\angle PAH}{PH}$, $\dfrac{\sin\angle BHP}{BP}=\dfrac{\sin\angle PBH}{PH}$，所以

$$\tan\angle AHP=\frac{\sin\angle PAH}{\sin\angle PBH}=\frac{\sin\angle PAH}{\sin A},\qquad \text{同理,}\quad \tan\angle AHQ=\frac{\sin\angle QAH}{\sin A}=\tan\angle AHP,$$

所以$\angle AHP=\angle AHQ$。 □

例 8.7. AH是锐角$\triangle ABC$的高，点M是AC的中点。点D在线段MB的延长线上，$AD\perp AC$。求证：$\angle BAD=\angle BHD$。

证. 法一：设A'为A关于BM的对称点，则$MA=MH=MC=MA'$，于是A,H,C,A'四点共圆，圆心为M。$\angle AA'D=\dfrac{\pi}{2}-\angle MA'A=\angle BMA$, $\angle HBD=\pi-\angle MBC=\pi-(\angle BMA-C)$。

法二（三角法）：$\angle BAD=\frac{\pi}{2}-A$，所以原式$\Longleftrightarrow\tan\angle BHD=\cot A$ ①。设$\angle MBC=\alpha$，我们有$\angle ADB=\frac{\pi}{2}-\alpha-C$,

$$\tan\angle BHD=\frac{BD\sin\alpha}{BH+BD\cos\alpha},\qquad BD=AB\cdot\frac{\sin\angle DAB}{\sin\angle ADB}=\frac{c\cos A}{\cos(\alpha+C)},\qquad \text{①式}\Longleftrightarrow$$
$$0=BD(\cos\alpha\cos A-\sin\alpha\sin A)+BH\cos A=BD\cos(A+\alpha)+BH\cos A,\qquad ②$$

因为$BH=c\cos B$，所以②式$\Longleftrightarrow 0=\cos(A+\alpha)+\cos B\cos(\alpha+C)=\cos\alpha(\cos A+\cos B\cos C)-\sin\alpha(\sin A+\cos B\sin C)=\cos\alpha\sin B\sin C-\sin\alpha(\cos C\sin B+2\cos B\sin C)$ ③。因为

$$\tan\alpha=\frac{b\sin C/2}{c\cos B+\frac{b\cos C}{2}}=\frac{\sin B\sin C}{2\cos B\sin C+\sin B\cos C},$$

所以③式右边$=0$，②, ①式和原式都成立。 □

9 几何选讲-3

例 9.1. 在$\triangle ABC$中，I是内心，直线AI与BC交于点D，与$\triangle ABC$外接圆交于另一点M。$\triangle DBM$, $\triangle DCM$的内心分别为J,K，点I关于J,K的对称点为P。求证：$PB\perp PC$。

证. □

例 9.2. O,H分别是$\triangle ABC$的外心、垂心，D,F分别是BC,AB的中点，P,Q分别在BA,BC上，且满足$DP\perp DH$, $FQ\perp FH$。求证：$PQ\perp OH$。

证. 设J为A到BC的投影，$\alpha=\angle BDP=\angle DHJ$，则

$$DJ\cot\alpha=c\cos B\cot C=2R\cos B\cos C,\qquad DJ=\frac{a}{2}-c\cos B=R\sin(B-C),$$
$$\cot\alpha=\frac{2\cos B\cos C}{\sin(B-C)},\qquad BP=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(B-\alpha)}=\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\sin B\cot\alpha-\cos B},\qquad ①$$
$$\text{因为}\sin B\cdot 2\cos B\cos C-\cos B\sin(B-C)=\sin B\cdot(\cos(B-C)-\cos A)-\cos B\sin(B-C)$$
$$=\sin(B-(B-C))-\sin B\cos A=\sin C-\sin B\cos A=\sin A\cos B,\qquad \text{所以①式右边}$$
$$=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sin(B-C)}{\sin A\cos B}=\frac{R\sin(B-C)}{\cos B},\qquad \text{同理,}\ BQ=\frac{R\sin(B-A)}{\cos B},$$

要证$PQ\perp OH \iff 0=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OH}=(\overrightarrow{BQ}-\overrightarrow{BP})\cdot(\overrightarrow{BH}-\overrightarrow{BO})$，即

$$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BH}-\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{BH}-\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{BO}\quad ②,\qquad \text{因为}\angle HBP=A+\frac{\pi}{2},\qquad \angle OBP=\frac{\pi}{2}+C,$$

$$\begin{aligned}\text{所以②式左边}&=2R^2\sin(B-C)\cdot(A+\frac{\pi}{2})-R^2\cdot\frac{\sin(B-C)}{\cos B}\cdot\cos(\frac{\pi}{2}+C)\\&=R^2\cdot\frac{\sin(B-C)}{\cos B}(-2\sin A\cos B+\sin C)=R^2\cdot\frac{\sin(B-C)\sin(B-A)}{\cos B},\end{aligned}$$

□

例 9.3 (2020，东南数学奥林匹克)**.** 如图，在四边形$ABCD$中，$\angle ABC=\angle ADC<\frac{\pi}{2}$，以$AC$为直径的圆与边$BC,CD$的另一个交点分别为$E,F$。设$M$为$BD$的中点，作$AN\perp BD$于点$N$。求证：$M,N,E,F$四点共圆。

证. □

例 9.4 (2024，高联A卷)**.** 在凸四边形$ABCD$中，AC平分$\angle BAD$，点E,F分别在边BC,CD上，满足$EF\parallel BD$。分别延长FA,EA至点P,Q，使得$\odot(ABP)$和$\odot(ADQ)$都与直线AC相切。求证：B,P,Q,D四点共圆。

证. □

例 9.5.

证. □

10 调和点列与完全四边形

性质 10.1. 线束的交比与所截直线无关。

证. 设过O的四条直线被直线l分别截于点A,C,B,D，被直线l_1分别截于点A_1,C_1,B_1,D_1，则

$$\frac{AC}{BC}=\frac{OA\sin\angle AOC}{OB\sin\angle BOC},\qquad \frac{AD}{BD}=\frac{OA\sin\angle AOD}{OB\sin\angle BOD},\qquad (A,B;C,D)=\frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle BOC}\cdot\frac{\sin\angle AOD}{\sin\angle BOD},$$

同理，$(A_1,B_1;C_1,D_1)=$上式右边$=(A,B;C,D)$。上述角度均为有向角。 □

性质 10.2. 若A,C,B,D成调和点列，O是CD中点，则有：（1）$\dfrac{2}{AB}=\dfrac{1}{AD}+\dfrac{1}{AC}$，（2）$OC^2=OD^2=OA\cdot OB$，（3）$AC\cdot AD=AB\cdot AO$，（4）$AB\cdot OD=AC\cdot BD$。

证. （1）因为$\dfrac{AB}{AD}+\dfrac{AB}{AC}=1-\dfrac{BD}{AD}+1+\dfrac{BC}{AC}=2$，所以$\dfrac{2}{AB}=\dfrac{1}{AC}+\dfrac{1}{AD}$；（2）设$AB=b$，$AC=c$，$AD=d$，则$OA=\dfrac{c+d}{2}$，$OB=OA-AB=\dfrac{c+d}{2}-b$ ①。由(1)问，$\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}$，$b=\dfrac{2cd}{c+d}$，①式右边$=\dfrac{(c-d)^2}{2(c+d)}$，所以$OA\cdot OB=\dfrac{(d-c)^2}{4}=OC^2=OD^2$。（3）由(2)问，$OC^2=OA\cdot OB=AO^2-AB\cdot AO$，所以$AC\cdot AD=AO^2-OC^2=AB\cdot AO$。（4） □

性质 10.3. 一直线被调和线束中的三条平分当且仅当它与第四条平行。

证. 充分性：设直线l与OB,OD,OA分别交于P,Q,R，若$l\parallel OC$，则过D作$l'\parallel l$分别交OB,OA于 P',R'。我们有$\dfrac{P'D}{OC}=\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{R'D}{OC}$，所以$P'D=R'D$，$\dfrac{PQ}{QR}=\dfrac{P'D}{R'D}=1$，$PQ=QR$。必要性：。 □

性质 10.4. 设完全四边形$ABCDEF$中，AB交CD于E，AD交BC于F，对角线AC与另外两条对角线BD, EF的交点为P, Q，则A, P, C, Q为调和点列。同理，设BD与EF交与点R，则B, P, D, R为调和点列，E, Q, F, R为调和点列。

证. 由塞瓦定理和梅涅劳斯定理，考察：(1)交于点C的三条直线AQ, ED, FB，和$\triangle AEF$的截线BDR；(2)交于点C的三条直线AP, BF, DE，和$\triangle ABD$的截线EFR；(3)交于点D的三条直线AF, BP, CE，和$\triangle ABC$的截线EFR，我们有：

$$\frac{EQ}{QF} = \frac{EB}{BA}\cdot\frac{AD}{DF} = \frac{ER}{RF}, \qquad \frac{BP}{PD} = \frac{BE}{EA}\cdot\frac{AF}{FD} = \frac{BR}{RD}, \qquad \frac{AP}{PC} = \frac{AE}{EB}\cdot\frac{BF}{FC} = \frac{AQ}{QC},$$

所以E, Q, F, R为调和点列，B, P, D, R为调和点列，A, P, C, Q为调和点列。 □

例 10.1. 在完全四边形$ABCDEF$中，AB交CD于E，AD交BC于F，设AC交BD于G，$GJ \perp EF$于点J，求证：$\angle BJA = \angle DJC$。

证. 延长AC交EF于K，由性质4知A, G, C, K成调和点列。因为$GJ \perp KJ$，由性质5知GJ平分$\angle CJA$。同理，延长BD交EF于L，则B, G, D, L成调和点列。因为$GJ \perp LJ$，所以GJ平分$\angle BJD$，$\angle BJA = \angle BJG + \angle GJA = \angle DJG + \angle GJC = \angle DJC$。 □

例 10.2. P为$\odot O$外一点，PA, PB为$\odot O$的两条切线，PCD为任意一条割线，CF平行于PA且与AB交于点E，与AD交于点F，求证：$CE = EF$。

证. 法一：设AB交CD于G，则因为$\triangle PCA \backsim \triangle PAD$，$\triangle PCB \backsim \triangle PBD$，$\triangle ACG \backsim \triangle DBG$，$\triangle CBG \backsim \triangle ADG$，所以

$$\frac{PC}{PD} = \frac{PC}{PA}\cdot\frac{PB}{PD} = \frac{AC}{AD}\cdot\frac{BC}{BD} = \frac{AC}{BD}\cdot\frac{BC}{AD} = \frac{CG}{BG}\cdot\frac{BG}{DG} = \frac{CG}{DG},$$

所以D, G, C, P成调和点列，AD, AG, AC, AP为调和线束。因为$CF /\!/ AP$，由性质3知$CE = EF$。

法二：由法一知D, G, C, P成调和点列。由梅涅劳斯定理，$\dfrac{CE}{EF} = \dfrac{CG}{GD}\cdot\dfrac{DA}{AF} = \dfrac{CP}{PD}\cdot\dfrac{DP}{PC} = 1$，所以$CE = EF$。 □

例 10.3. 点D, E分别在$\triangle ABC$的边BC, AB上，AD, CE相交于F，BF, DE相交于G，过G作BC的平行线，分别与直线CE, AC相交于M, N。求证：$GM = MN$。

证. 设BF交AC于K，由梅涅劳斯定理和塞瓦定理，有$\dfrac{BG}{GF} = \dfrac{BC}{CD}\cdot\dfrac{DA}{AF} = \dfrac{BK}{KF}$，所以$B, G, F, K$为调和点列，$CB, CG, CF, CK$为调和线束。又因为$GM /\!/ BC$，$G, M, N$是直线$GM$截$CG, CF, CK$的交点，由性质3知$GM = MN$。 □

例 10.4 (Brocard定理)**.** 在圆内接四边形$ABCD$中，AB交CD于P，AD交BC于Q，AC交BD于点R，则P, Q, R, O构成垂心四点组（即任意一点是其余三点的垂心）。

证. □

例 10.5.

证. □