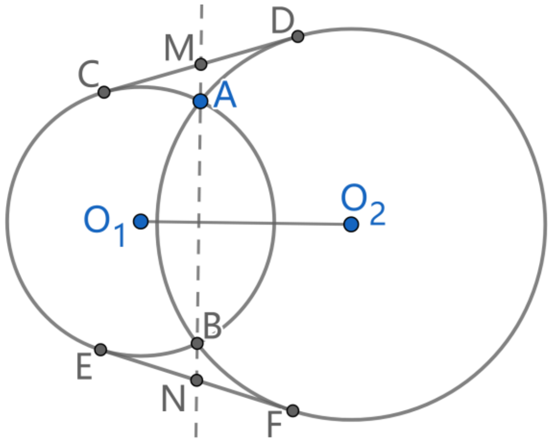
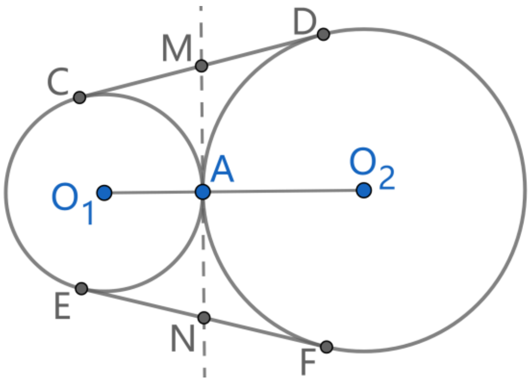
圆的性质-2

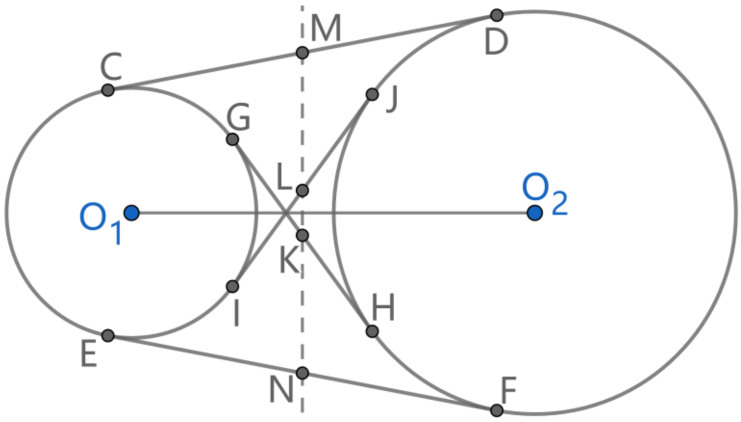
圆的性质-2

一、知识要点

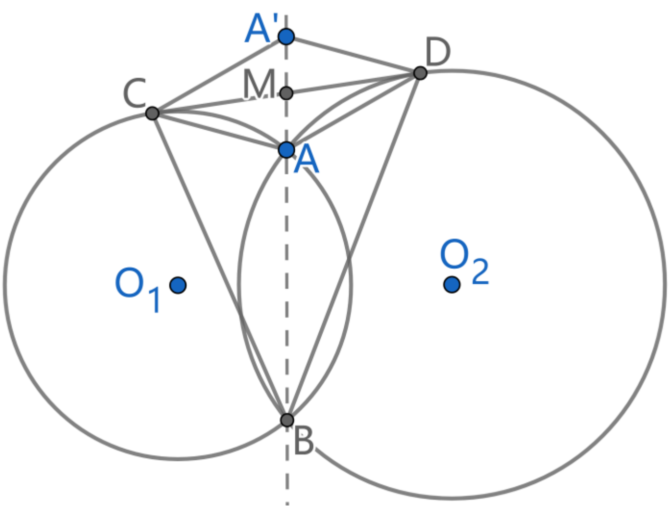
性质 1. 设不同心的两圆根轴为直线 l。若两圆相交，外切或外离，则有两条外公切线，每条外公切线的中点在 l 上；若两圆外离，则有两条内公切线，每条内公切线的中点在 l 上。





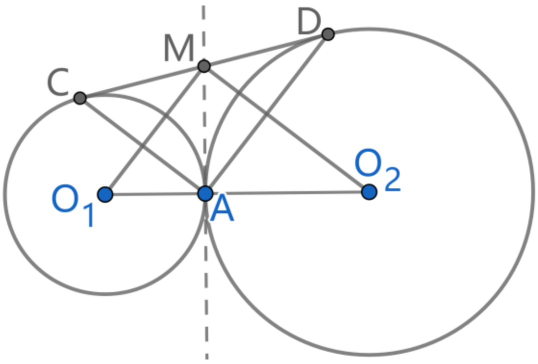


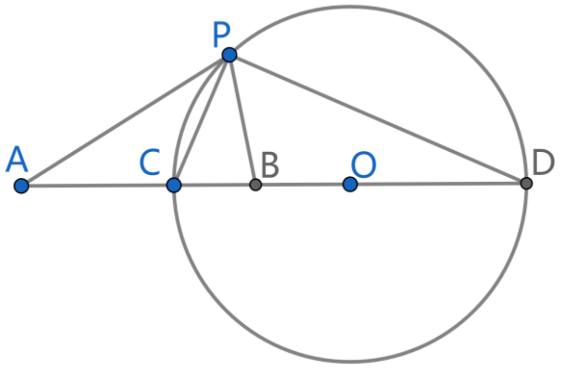
性质 2. 若两圆相交，设它们交于 A,B 两点，它们的一条外公切线为 CD，M 是 CD 中点，A 关于 M 的对称点为点 A'。则 $\angle CAD+\angle CBD=\pi$，$A'$ 在直线 AB 上，A',B,C,D 四点共圆，且 $\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{BC}{BD}=\sqrt{\dfrac{R_1}{R_2}}$。这里 R_1,R_2 分别是 $\odot O_1,\odot O_2$ 的半径。



性质 3. 若两圆外切，设切点为 A，设它们的一条外公切线为 CD， M 是 CD 中点， R_1, R_2 分别是 $\odot O_1, \odot O_2$ 的半径。则 $MA = MC = MD$， $\angle CAD = \frac{\pi}{2}$， $\frac{AC}{AD} = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$ 。

定理 1. 到两定点 A, B 距离之比为定值 k （$k > 0, k \neq 1$）的点，即满足 $\frac{PA}{PB} = k$ 的点 P 的轨迹为一个圆，称为阿波罗尼斯圆，简称阿氏圆。





性质 4. 插图同定理 1，如下三个条件中，由其中两个可以推出第三个：

（1） PC （或 PD）为 $\angle APB$ 的内（外）角平分线；　　（2） $CP \perp PD$；

（3） $A, B; C, D$ 成调和点列，即 $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$ （C, D 不重合）。

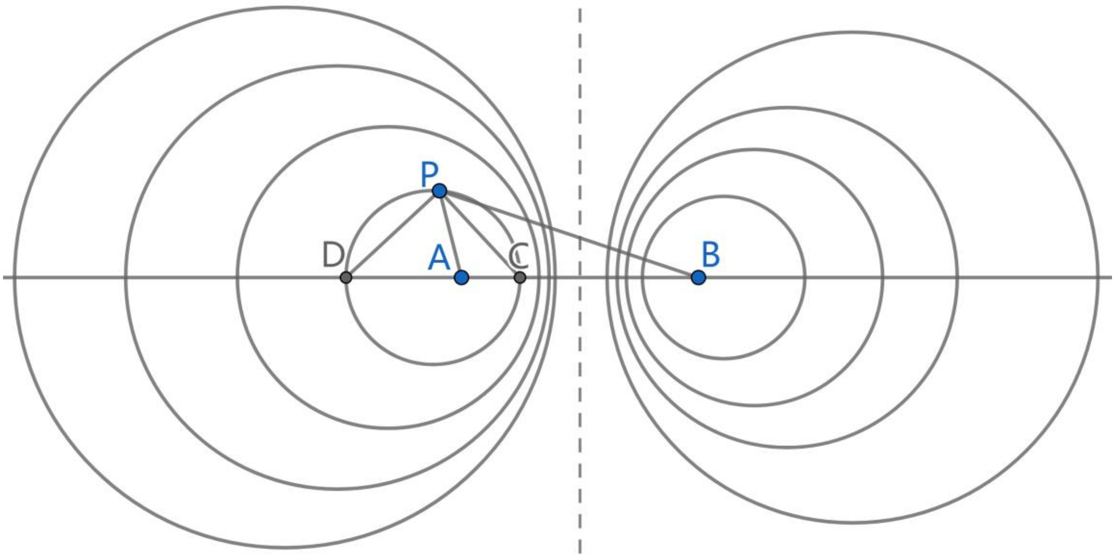
定义 1. 一组圆中，若每两个的根轴都是同一直线，则称这组圆为共轴圆系。

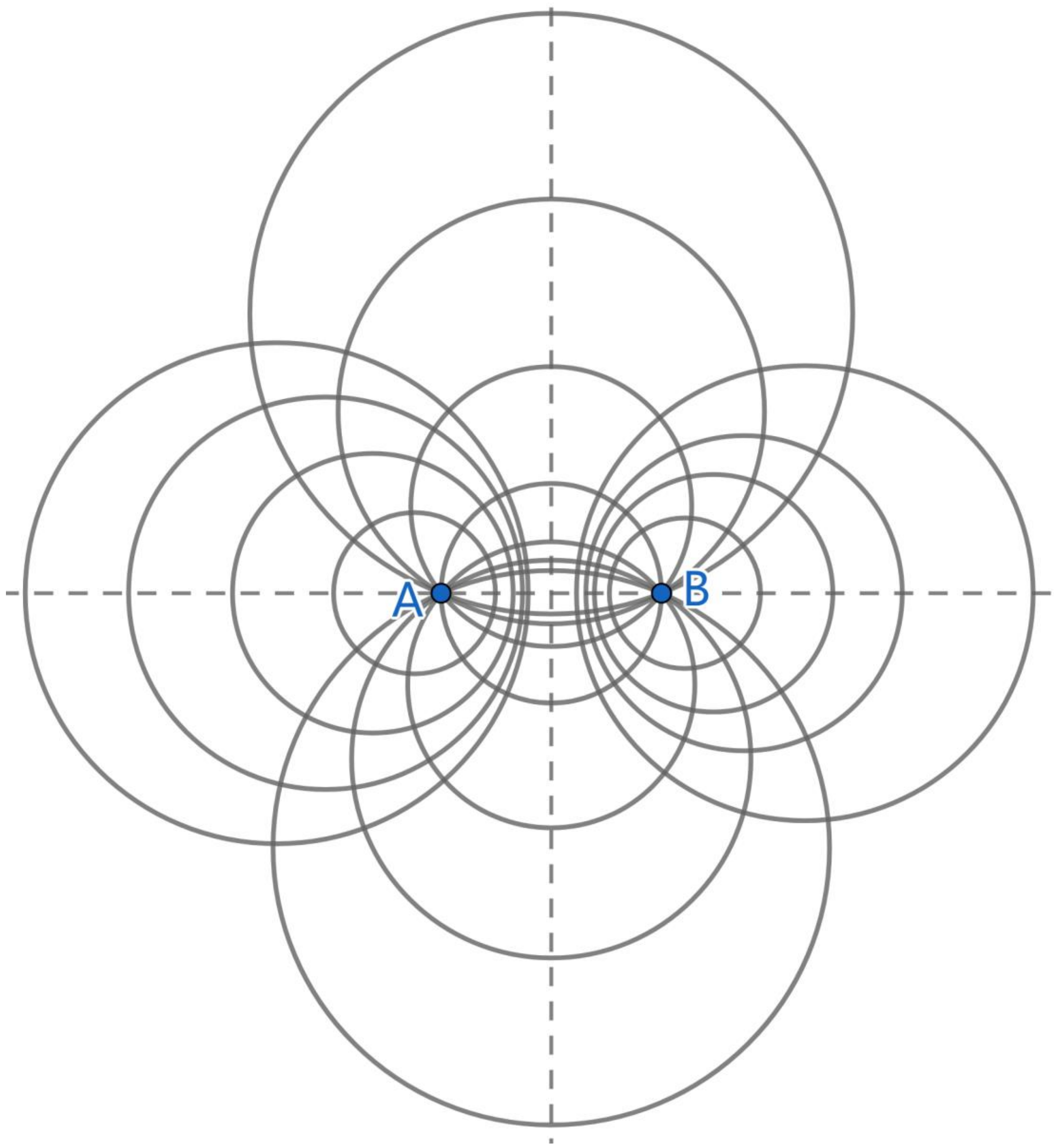
定理 2. 设到两定点 A, B 距离之比为定值 k （$k > 0, k \neq 1$）的点的轨迹为圆 ω_k， 我们有：

（1） $\{\omega_k \mid k > 0, k \neq 1\}$ 是共轴圆系，它们共同的根轴是 AB 的中垂线；

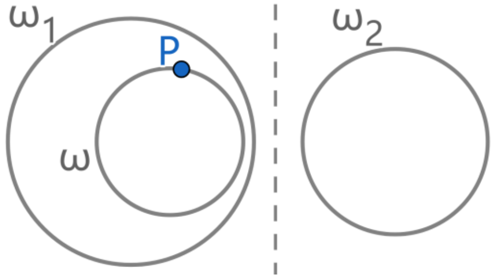
（2）易知过 A, B 两点的所有圆组成一个共轴圆系，它们共同的根轴是直线 AB；

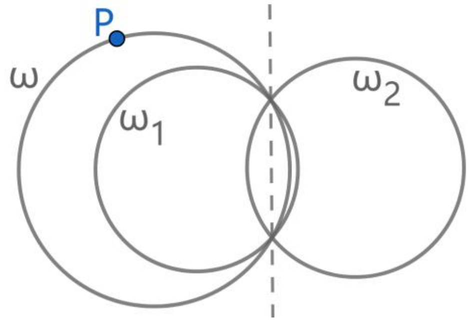
（3）前两问的共轴圆系中各任取一个圆，则这两个圆正交。(两圆正交定义为这两圆相交，且在交点处的两条切线互相垂直。)





定理 3. 设ω,ω_1,ω_2是共轴的三个圆，则存在常数C，满足对ω上任意一点P，都有$\mathrm{Pow}(P,\omega_1)=C\cdot\mathrm{Pow}(P,\omega_2)$。反之，设$\omega_1,\omega_2$是不同心的两个定圆，则到这两个圆的幂的比为定值$C$的点，即$\dfrac{\mathrm{Pow}(P,\omega_1)}{\mathrm{Pow}(P,\omega_2)}=C$的点$P$的轨迹是与$\omega_1,\omega_2$共轴的一个圆$\omega$。$\omega_1,\omega_2$退化为点圆时$\omega$即为定理 1 中的阿氏圆。

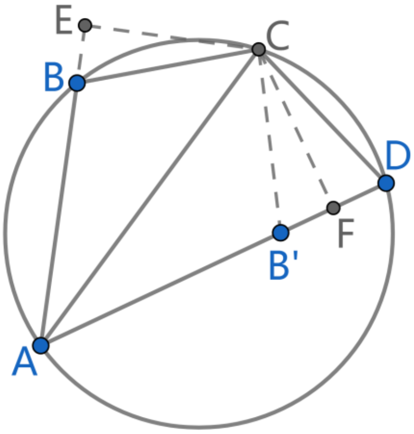


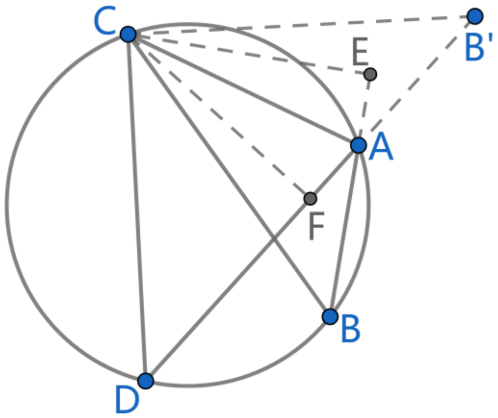


二、例题精讲

例 1. 如图，点 B,D 在 AC 异侧，且满足 $\angle BAC=\angle DAC$，$BC=CD$，$AB\neq AD$。求证：A,B,C,D 四点共圆。

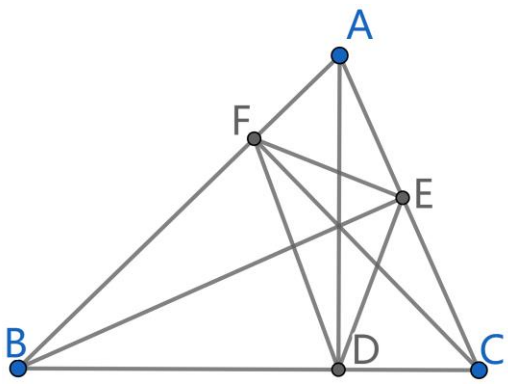
例 2. 如图，点 B,D 在 AC 同侧，且满足 $\angle BAC+\angle DAC=\pi$，$BC=CD$。求证：$A,B,C,D$ 四点共圆。

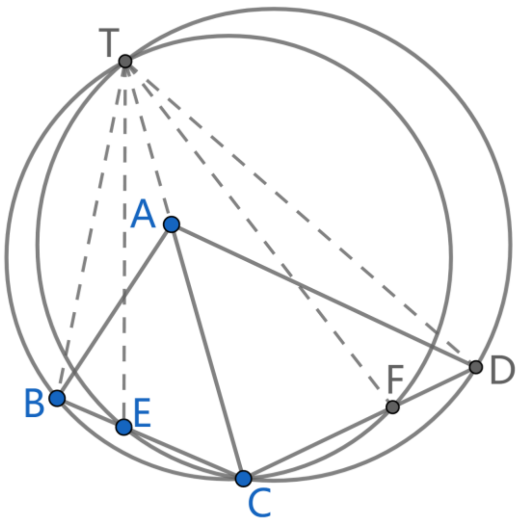




例 3. 锐角 $\triangle ABC$ 中，D,E,F 分别在边 BC,CA,AB 上，且满足 $\angle BDF=\angle CDE$，$\angle CED=\angle AEF$，$\angle AFE=\angle BFD$。求证：AD,BE,CF 分别是 BC,CA,AB 边上的高。

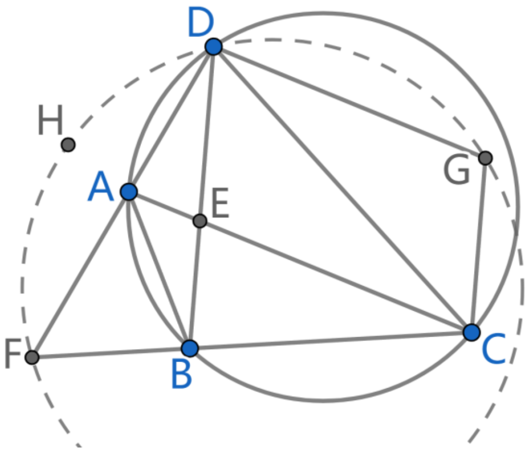
例 4.（2024，高联 B 卷）在凸四边形 $ABCD$ 中，AC 平分 $\angle BAD$，且 $AC^2=AB\cdot AD$。点 E,F 分别在边 BC,CD 上，满足 $EF\parallel BD$。$\odot(CBF)$ 和 $\odot(CDE)$ 交于 C 及另一点 T。求证：T 在直线 AC 上。

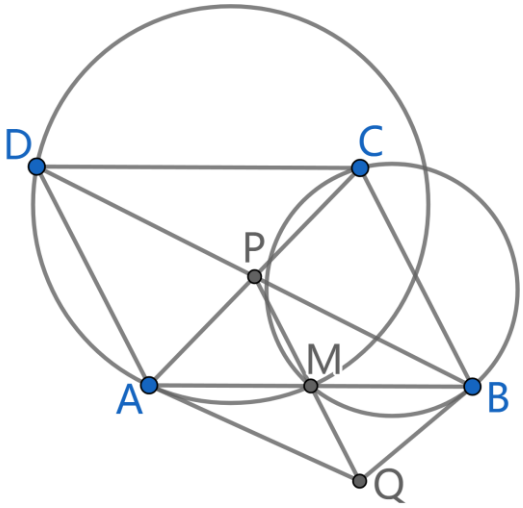




例 5. 已知 A,B,C,D 四点共圆，AC 交 BD 于 E，AD 交 BC 于 F。作平行四边形 $DECG$ 和 E 关于直线 DF 的对称点 H，求证：D,G,F,H 四点共圆。

例 6. 设 $ABCD$ 是一个平行四边形， P 是它两条对角线的交点， M 是 AB 边的中点。点 Q 满足 QA 与 $\odot(MAD)$ 相切， QB 与 $\odot(MBC)$ 相切。求证： Q, M, P 三点共线。





例 7. $\triangle ABC$ 中， $AN \perp BC$ 于 N ， M 是 BC 中点，过 M 任意作一条直线与以 AB 为直径的圆交于 D, E 两点， $\triangle ADE$ 的垂心为 H 。求证： A, H, C, N 四点共圆。

例 8. $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = \dfrac{\pi}{3}$ ，过 A 作 $\angle B, \angle C$ 的外角平分线的垂线，垂足分别为 D, E 。设 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，求证： $\odot(BOC)$ 与 $\odot(AED)$ 相切。