

数列和函数的极限

数列和函数的极限

一、知识要点

定义 1. (数列的极限) 给定数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 。(1) 若存在常数 a , 使得对于任意给定的正数 ϵ (不论它多么小), 总存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 总有 $|x_n - a| < \epsilon$, 那么就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限, 或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 或 $x_n \rightarrow a, (n \rightarrow \infty)$ 。如果不存在这样的常数 a , 就说数列 $\{x_n\}$ 没有极限, 或者说数列 $\{x_n\}$ 是发散的。

(2) 若对任意给定的正数 M (不论它多么大), 总存在正整数 N , 使得: (i) 当 $n > N$ 时, 总有 $|x_n| > M$, 那么就称数列 $\{x_n\}$ 趋于无穷, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, 或 $x_n \rightarrow \infty, (n \rightarrow \infty)$; (ii) 当 $n > N$ 时, 总有 $x_n > M$, 那么就称数列 $\{x_n\}$ 趋于正无穷, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, 或 $x_n \rightarrow +\infty, (n \rightarrow \infty)$; (iii) 当 $n > N$ 时, 总有 $x_n < -M$, 那么就称数列 $\{x_n\}$ 趋于负无穷, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, 或 $x_n \rightarrow -\infty, (n \rightarrow \infty)$ 。

性质 1. (收敛数列的性质) (1) 唯一性: 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么它的极限唯一。

(2) 有界性: 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么该数列一定有界。

(3) 保号性: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, a > 0$, 那么存在正整数 N , 使得对 $n > N$, 都有 $x_n > 0$ 。类似地, 若 $a < 0$, 则对充分大的 n 有 $x_n < 0$ 。

(4) 若 $x_n \geq 0, n \geq 1$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $a \geq 0$ 。这是保号性的推论。

性质 2. (数列极限的四则运算) 设 $\{x_n\}_{n \geq 1}, \{y_n\}_{n \geq 1}$ 是两个数列。若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$, 则有: (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = A \pm B$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = A \cdot B$; (3) 当 $y_n \neq 0, n \geq 1$ 且 $B \neq 0$

时, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}$ 。本定理即: 数列和差积商的极限等于极限的和差积商。

定义 2. (函数的极限) (1) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义, 若存在常数 A , 使得对于任意给定的正数 ϵ (不论它多么小), 总存在正数 δ , 使得当 x 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足 $|f(x) - A| < \epsilon$, 那么就称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的

数列和函数的极限

极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 或 $f(x) \rightarrow A, (x \rightarrow x_0)$ 。

(2) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 大于某一正数时有定义, 若存在常数 A , 使得对于任意给定的正数 ϵ (不论它多么小), 总存在正数 X , 使得当 x 满足 $|x| > X$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足 $|f(x) - A| < \epsilon$, 那么就称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, 或 $f(x) \rightarrow A, (x \rightarrow \infty)$ 。类似地可以定义 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ (将上述 $|x| > X$ 改为 $x > X$), 以及 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ (将上述 $|x| > X$ 改为 $x < -X$)。

定理 1. (函数极限与数列极限的关系) 存在函数极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充要条件是, 对任意 $f(x)$ 定义域内满足 $x_n \neq x_0, n \geq 1$ 且收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ (即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$), 都有相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}_{n \geq 1}$ 收敛于 A , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ 。注: 证明充分性适合用反证法,

即由 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq A$ 推出存在满足 $x_n \neq x_0, n \geq 1$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ 的数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq A。$$

定义 3. (函数的无穷小与无穷大) (1) 若函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的极限为零, 那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小。

(2) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内 (或 x_0 大于某一正数时) 有定义, 若对于任意给定的正数 M (不论它多么大), 总存在正数 δ (或正数 X), 使得当 x 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ (或 $|x| > X$) 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足 $|f(x)| < M$, 那么就称函数 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷大, 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, f(x) \rightarrow \infty, (x \rightarrow x_0)$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, f(x) \rightarrow \infty, (x \rightarrow \infty)$)。类似地可以定义 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, 以及 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ 。

性质 3. (函数极限的性质) (1) 唯一性: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 那么这个极限唯一。

(2) 局部有界性: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 那么存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| < M$ 。

(3) 局部保号性: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, A > 0$ (或 $A < 0$), 那么存在常数 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 都有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$)。

(4) 若在 x_0 的某个去心邻域内 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$)。这是局部保号性的推论。

性质 4. (函数极限的四则运算) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则有:

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$; (2) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$; (3) 当 $B \neq 0$ 时, 有

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ 。将上述 $x \rightarrow x_0$ 改为 $x \rightarrow \infty$, 命题同样成立。本定理即: 函数和差积商的

极限等于极限的和差积商。

推论 1. (1) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, c 为常数, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} (cf(x)) = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 。(2) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, n 为正整数, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)^n) = (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))^n$ 。上述 $x \rightarrow x_0$ 可改为 $x \rightarrow \infty$ 。

定理 2. (夹逼准则) 若数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}, \{y_n\}_{n \geq 1}, \{z_n\}_{n \geq 1}$ 满足条件: (1) 存在正整数 n_0 , 使得对任意的 $n > n_0$, 都有 $y_n \leq x_n \leq z_n$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$; 那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 。上述数列极限存在准则可以推广到函数的极限: 如果函数 $f(x), g(x), h(x)$

满足 (1) 当 $|x - x_0| < r, x \neq x_0$ 时, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$; (2) $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$,

那么存在极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。

定理 3. (单调有界原理) 单调有界数列必有极限。回忆性质 1 (2), 即收敛数列的有界性, 我们得到了下列结论: 单调数列有极限的充要条件是它有界。

二、例题精讲

例 1. 求证: (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$, 这就是《庄子》里所说的“一尺之棰, 日取其半, 万世不竭”。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, 以上两例说明求极限不保持严格的不等号, 即有可能 $x_n > A, n \geq 1$, 且

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 。(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$; (4) 设 $x_n = 0.999\dots 9$, 小数点后有 n 个 9, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ 。

例 2. 求下列极限: (1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 5x + 3}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9}$; (3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 3}{x^2 - 5x + 4}$; (4)

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 + 2}{7x^3 + 5x^2 - 3}$; (5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^3 - x^2 + 5}$; (6) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$ 。

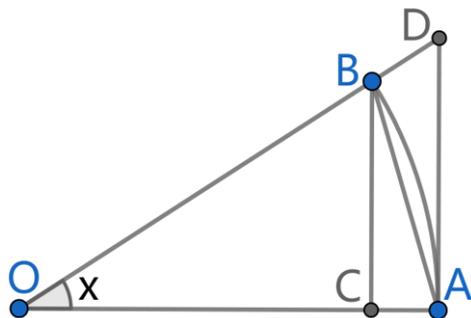
例 3. 设 $m, n \in \mathbb{N}$, 多项式 $P(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i, Q(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i, a_m \neq 0, b_n \neq 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0, & n > m, \\ \frac{a_m}{b_n}, & n = m, \\ \infty, & n < m, \end{cases}$$

例 4. (1) 回忆扇形的面积公式, 求证: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 我们有 $\sin x < x < \tan x$, 所以

$x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$ 时, 有 $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$; (2) 证明 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ 时, $0 < 1 - \cos x < \frac{x^2}{2}$,

以及 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$; (3) 使用夹逼准则证明下述极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 。极限 (3) 说明了弧度制相比角度制的优越性: 有关三角函数的许多重要公式在弧度制中, 比在角度制中简单得多。



例 5. 求证: (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$; (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ 。

例 6. 设 $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n, z_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}, n \geq 1$, 求证: (1) $(1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}, n \geq 1$,

即数列 $\{x_n\}$ 单调递增; (2) $(1 + \frac{1}{n-1})^n > (1 + \frac{1}{n})^{n+1}, n \geq 2$, 即数列 $\{z_n\}$ 单调递减; (3)

$2 = x_1 \leq x_n < z_n \leq z_1 = 4, n \geq 1$, 即数列 $\{x_n\}, \{z_n\}$ 有界; (4) 由单调有界原理, 数列 $\{x_n\}, \{z_n\}$ 的极限都存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [x_n (1 + \frac{1}{n})] = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

定义 4. 设例 6 最后两个相等的极限为 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$, 称为自然常数。

定义 5. 给定数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$, 令 $s_n = \sum_{k=1}^n a_k, n \geq 1$ 。我们定义级数或无穷级数为

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$, 称 s_n 为上述级数的部分和, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ 存在, 就说级数收敛,

并定义 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$; 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ 不存在, 就说级数发散。

例 7. (1) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$ 称为等比级数或几何级数, 它的部分和为

$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{1-q^n}{1-q}, n \geq 1$ 。 $|q| \geq 1$ 时级数发散, $|q| < 1$ 时级数收敛, 此时因为

$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1-q}$ 。(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ 称为调和级数, 因为

从第二项开始每一项都是相邻两项的调和平均值。设它的部分和为 $s_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}, n \geq 1$, 则

$k \geq 0$ 时, 由于 $s_{2^{k+1}} - s_{2^k} = \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{j} \geq \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$, 所以

$s_{2^k} = \sum_{i=1}^k (s_{2^i} - s_{2^{i-1}}) + s_1 \geq \frac{k}{2} + 1$ 。对任意的 $n \geq 1$, 令 $k = \lfloor \log_2 n \rfloor$, 则

$s_n \geq s_{2^k} \geq \frac{k}{2} + 1 = \frac{1}{2} \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$, 调和级数发散。

例 8. 设 $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, $y_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}$, $n \geq 1$, 这里约定 $0! = 1$ 。由 $k \geq 2$ 时 $\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} < \frac{1}{k!}$ 和二项式

定理, 我们有 $(1 + \frac{1}{n})^n = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} + \dots + \frac{1}{n^n} < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ 在

$n \geq 2$ 时成立, 即 $x_n < y_n$, $n \geq 2$ 。另一边, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} = \frac{1}{j!}$, $j \geq 1$, 且 $1 \leq k \leq n$ 时,

$1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq x_n$, 对上式取 $n \rightarrow \infty$ 的极限即得 $y_k \leq e$ 。所以

$x_n < y_n \leq e$, 由夹逼准则, 我们有 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$ 。

例 9. 求证: 对任意正整数 n , $n!e$ 都不是整数, 所以 e 是无理数。

例 10. (2012, 高联 A 卷) 对正整数 n , 设 $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, 求证: 对满足 $0 \leq a < b \leq 1$ 的任意实数 a, b , 数列 $\{S_n - \lfloor S_n \rfloor\}$ 中有无穷多项属于区间 (a, b) 。

例 11. (2012, 高联 B 卷) 设数列 $\{x_n\}_{n \geq 0}$ 满足 $x_0 > 0$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}$, $n \geq 0$ 。求证: 存在常数 $A > 1$ 和常数 $C > 0$, 使得 $|x_n - A| < \frac{C}{A^n}$ 对任意正整数 n 成立。