

数列和函数的极限

一、知识要点

定义 1. (数列的极限) 给定数列  $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 。(1) 若存在常数  $a$ , 使得对于任意给定的正数  $\epsilon$  (不论它多么小), 总存在正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 总有  $|x_n - a| < \epsilon$ , 那么就称常数  $a$  是数列  $\{x_n\}$  的极限, 或者称数列  $\{x_n\}$  收敛于  $a$ , 记为  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 或  $x_n \rightarrow a, (n \rightarrow \infty)$ 。如果不存在这样的常数  $a$ , 就说数列  $\{x_n\}$  没有极限, 或者说数列  $\{x_n\}$  是发散的。

(2) 若对任意给定的正数  $M$  (不论它多么大), 总存在正整数  $N$ , 使得: (i) 当  $n > N$  时, 总有  $|x_n| > M$ , 那么就称数列  $\{x_n\}$  趋于无穷, 记为  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ , 或  $x_n \rightarrow \infty, (n \rightarrow \infty)$ ; (ii) 当  $n > N$  时, 总有  $x_n > M$ , 那么就称数列  $\{x_n\}$  趋于正无穷, 记为  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , 或  $x_n \rightarrow +\infty, (n \rightarrow \infty)$ ; (iii) 当  $n > N$  时, 总有  $x_n < -M$ , 那么就称数列  $\{x_n\}$  趋于负无穷, 记为  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ , 或  $x_n \rightarrow -\infty, (n \rightarrow \infty)$ 。

性质 1. (收敛数列的性质) (1) 唯一性: 若数列  $\{x_n\}$  收敛, 那么它的极限唯一。

(2) 有界性: 若数列  $\{x_n\}$  收敛, 那么该数列一定有界。

(3) 保号性: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, a > 0$ , 那么存在正整数  $N$ , 使得对  $n > N$ , 都有  $x_n > 0$ 。类似地, 若  $a < 0$ , 则对充分大的  $n$  有  $x_n < 0$ 。

(4) 若  $x_n \geq 0, n \geq 1$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 则  $a \geq 0$ 。这是保号性的推论。

性质 2. (数列极限的四则运算) 设  $\{x_n\}_{n \geq 1}, \{y_n\}_{n \geq 1}$  是两个数列。若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$ , 则有: (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = A \pm B$ ; (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = A \cdot B$ ; (3) 当  $y_n \neq 0, n \geq 1$  且  $B \neq 0$

时, 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}$ 。本定理即: 数列和差积商的极限等于极限的和差积商。

定义 2. (函数的极限) (1) 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某一去心邻域内有定义, 若存在常数  $A$ , 使得对于任意给定的正数  $\epsilon$  (不论它多么小), 总存在正数  $\delta$ , 使得当  $x$  满足  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 对应的函数值  $f(x)$  都满足  $|f(x) - A| < \epsilon$ , 那么就称常数  $A$  是函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的

## 数列和函数的极限

极限, 记作  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 或  $f(x) \rightarrow A, (x \rightarrow x_0)$ 。

(2) 设函数  $f(x)$  在  $x_0$  大于某一正数时有定义, 若存在常数  $A$ , 使得对于任意给定的正数  $\epsilon$  (不论它多么小), 总存在正数  $X$ , 使得当  $x$  满足  $|x| > X$  时, 对应的函数值  $f(x)$  都满足  $|f(x) - A| < \epsilon$ , 那么就称常数  $A$  是函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow \infty$  时的极限, 记作  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ , 或  $f(x) \rightarrow A, (x \rightarrow \infty)$ 。类似地可以定义  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$  (将上述  $|x| > X$  改为  $x > X$ ), 以及  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$  (将上述  $|x| > X$  改为  $x < -X$ )。

定理 1. (函数极限与数列极限的关系) 存在函数极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  的充要条件是, 对任意  $f(x)$  定义域内满足  $x_n \neq x_0, n \geq 1$  且收敛于  $x_0$  的数列  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  (即  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ), 都有相应的函数值数列  $\{f(x_n)\}_{n \geq 1}$  收敛于  $A$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ 。注: 证明充分性适合用反证法,

即由  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq A$  推出存在满足  $x_n \neq x_0, n \geq 1$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  的数列  $\{x_n\}_{n \geq 1}$ , 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq A。$$

定义 3. (函数的无穷小与无穷大) (1) 若函数  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的极限为零, 那么称函数  $f(x)$  为当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的无穷小。

(2) 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某一去心邻域内 (或  $x_0$  大于某一正数时) 有定义, 若对于任意给定的正数  $M$  (不论它多么大), 总存在正数  $\delta$  (或正数  $X$ ), 使得当  $x$  满足  $0 < |x - x_0| < \delta$  (或  $|x| > X$ ) 时, 对应的函数值  $f(x)$  都满足  $|f(x)| < M$ , 那么就称函数  $f(x)$  是当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的无穷大, 记作  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, f(x) \rightarrow \infty, (x \rightarrow x_0)$  (或  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, f(x) \rightarrow \infty, (x \rightarrow \infty)$ )。类似地可以定义  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , 以及  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ 。

性质 3. (函数极限的性质) (1) 唯一性: 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 那么这个极限唯一。

(2) 局部有界性: 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 那么存在常数  $M > 0$  和  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x)| < M$ 。

(3) 局部保号性: 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, A > 0$  (或  $A < 0$ ), 那么存在常数  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 都有  $f(x) > 0$  (或  $f(x) < 0$ )。

(4) 若在  $x_0$  的某个去心邻域内  $f(x) \geq 0$  (或  $f(x) \leq 0$ ), 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则  $A \geq 0$  (或  $A \leq 0$ )。这是局部保号性的推论。

性质 4. (函数极限的四则运算) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ , 则有:

(1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$ ; (2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$ ; (3) 当  $B \neq 0$  时, 有

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ 。将上述  $x \rightarrow x_0$  改为  $x \rightarrow \infty$ , 命题同样成立。本定理即: 函数和差积商的

极限等于极限的和差积商。

推论 1. (1) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在,  $c$  为常数, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} (cf(x)) = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 。(2) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在,  $n$  为正整数, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)^n) = (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))^n$ 。上述  $x \rightarrow x_0$  可改为  $x \rightarrow \infty$ 。

定理 2. (夹逼准则) 若数列  $\{x_n\}_{n \geq 1}, \{y_n\}_{n \geq 1}, \{z_n\}_{n \geq 1}$  满足条件: (1) 存在正整数  $n_0$ , 使得对任意的  $n > n_0$ , 都有  $y_n \leq x_n \leq z_n$ ; (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ ; 那么数列  $\{x_n\}$  的极限存在, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 。上述数列极限存在准则可以推广到函数的极限: 如果函数  $f(x), g(x), h(x)$

满足 (1) 当  $|x - x_0| < r, x \neq x_0$  时,  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ; (2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$ ,

那么存在极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。

定理 3. (单调有界原理) 单调有界数列必有极限。回忆性质 1 (2), 即收敛数列的有界性, 我们得到了下列结论: 单调数列有极限的充要条件是它有界。

## 二、例题精讲

例 1. 求证: (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ , 这就是《庄子》里所说的“一尺之棰, 日取其半, 万世不竭”。

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , 以上两例说明求极限不保持严格的不等号, 即有可能  $x_n > A, n \geq 1$ , 且

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 。(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ ; (4) 设  $x_n = 0.999\dots 9$ , 小数点后有  $n$  个 9, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ 。

例 2. 求下列极限: (1)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 5x + 3}$ ; (2)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9}$ ; (3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 3}{x^2 - 5x + 4}$ ; (4)

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 + 2}{7x^3 + 5x^2 - 3}$ ; (5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^3 - x^2 + 5}$ ; (6)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$ 。

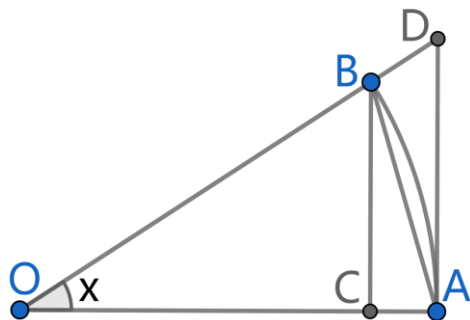
例 3. 设  $m, n \in \mathbb{N}$ , 多项式  $P(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i, Q(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i, a_m \neq 0, b_n \neq 0$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0, & n > m, \\ \frac{a_m}{b_n}, & n = m, \\ \infty, & n < m, \end{cases}$$

例 4. (1) 回忆扇形的面积公式, 求证:  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时, 我们有  $\sin x < x < \tan x$ , 所以

$x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$  时, 有  $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ ; (2) 证明  $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$  时,  $0 < 1 - \cos x < \frac{x^2}{2}$ ,

以及  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ ; (3) 使用夹逼准则证明下述极限:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 。极限 (3) 说明了弧度制相比角度制的优越性: 有关三角函数的许多重要公式在弧度制中, 比在角度制中简单得多。



例 5. 求证: (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ ; (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ ; (3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ 。

例 6. 设  $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n, z_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}, n \geq 1$ , 求证: (1)  $(1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}, n \geq 1$ ,

即数列  $\{x_n\}$  单调递增; (2)  $(1 + \frac{1}{n-1})^n > (1 + \frac{1}{n})^{n+1}, n \geq 2$ , 即数列  $\{z_n\}$  单调递减; (3)

$2 = x_1 \leq x_n < z_n \leq z_1 = 4, n \geq 1$ , 即数列  $\{x_n\}, \{z_n\}$  有界; (4) 由单调有界原理, 数列  $\{x_n\}, \{z_n\}$  的极限都存在, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [x_n (1 + \frac{1}{n})] = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

定义 4. 设例 6 最后两个相等的极限为  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ , 称为自然常数。

定义 5. 给定数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$ , 令  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k, n \geq 1$ 。我们定义级数或无穷级数为

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ , 称  $s_n$  为上述级数的部分和, 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  存在, 就说级数收敛,

并定义  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ ; 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  不存在, 就说级数发散。

例 7. (1)  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$  称为等比级数或几何级数, 它的部分和为

$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{1-q^n}{1-q}, n \geq 1$ 。  $|q| \geq 1$  时级数发散,  $|q| < 1$  时级数收敛, 此时因为

$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1-q}$ 。(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$  称为调和级数, 因为

从第二项开始每一项都是相邻两项的调和平均值。设它的部分和为  $s_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}, n \geq 1$ , 则

$k \geq 0$  时, 由于  $s_{2^{k+1}} - s_{2^k} = \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{j} \geq \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$ , 所以

$s_{2^k} = \sum_{i=1}^k (s_{2^i} - s_{2^{i-1}}) + s_1 \geq \frac{k}{2} + 1$ 。对任意的  $n \geq 1$ , 令  $k = \lfloor \log_2 n \rfloor$ , 则

$s_n \geq s_{2^k} \geq \frac{k}{2} + 1 = \frac{1}{2} \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ , 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$ , 调和级数发散。

例 8. 设  $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ ,  $y_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}$ ,  $n \geq 1$ , 这里约定  $0! = 1$ 。由  $k \geq 2$  时  $\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} < \frac{1}{k!}$  和二项式

定理, 我们有  $(1 + \frac{1}{n})^n = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} + \dots + \frac{1}{n^n} < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$  在

$n \geq 2$  时成立, 即  $x_n < y_n$ ,  $n \geq 2$ 。另一边, 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} = \frac{1}{j!}$ ,  $j \geq 1$ , 且  $1 \leq k \leq n$  时,

$1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq x_n$ , 对上式取  $n \rightarrow \infty$  的极限即得  $y_k \leq e$ 。所以

$x_n < y_n \leq e$ , 由夹逼准则, 我们有  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$ 。

例 9. 求证: 对任意正整数  $n$ ,  $n!e$  都不是整数, 所以  $e$  是无理数。

例 10. (2012, 高联 A 卷) 对正整数  $n$ , 设  $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ , 求证: 对满足  $0 \leq a < b \leq 1$

的任意实数  $a, b$ , 数列  $\{S_n - \lfloor S_n \rfloor\}$  中有无穷多项属于区间  $(a, b)$ 。

例 11. (2012, 高联 B 卷) 设数列  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  满足  $x_0 > 0$ ,  $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}$ ,  $n \geq 0$ 。求证: 存在常

数  $A > 1$  和常数  $C > 0$ , 使得  $|x_n - A| < \frac{C}{A^n}$  对任意正整数  $n$  成立。