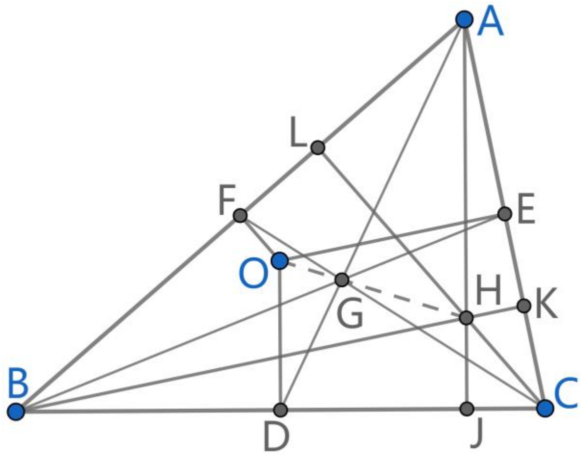
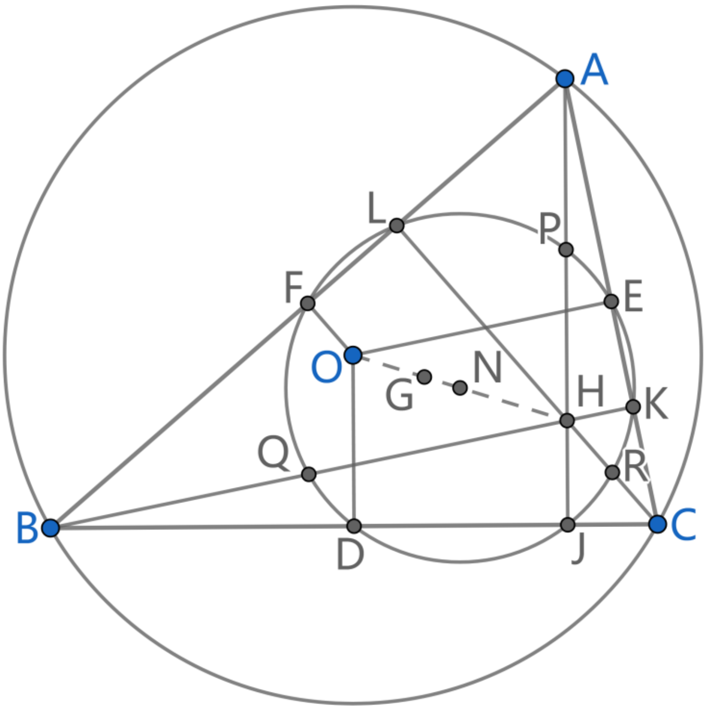
九点圆与欧拉线

一、知识要点

定理 1.（欧拉线）$\triangle ABC$ 的重心 G，垂心 H 和外心 O 三点共线，G 在 O,H 之间且 $GH=2GO$。



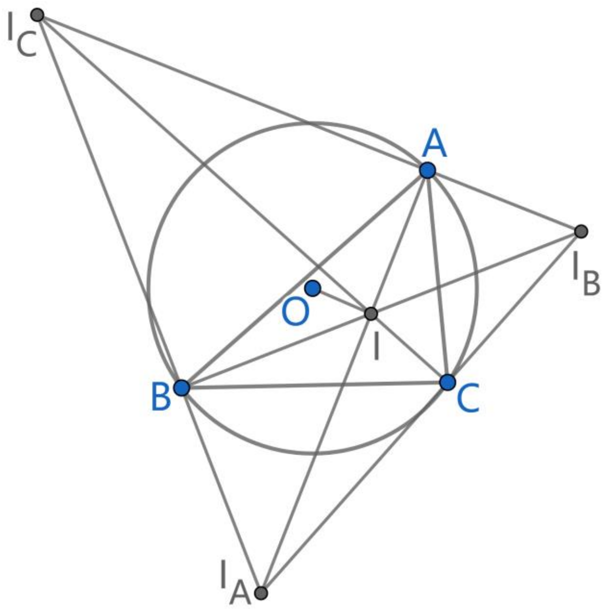
定理 2.（九点圆）三角形三条高的垂足，三条边的中点，以及垂心与顶点连接的三条线段的中点，这九点共圆。九点圆的圆心在三角形的欧拉线上，它是三角形外心和垂心的中点。



性质 1. 设 $\triangle ABC$ 的九点圆为 $\odot N$，外接圆为 $\odot O$，则有：（1）$\odot N$ 半径是 $\odot O$ 半径的一半。（2）$\triangle ABC$ 的垂心 H 是 $\odot N$ 与 $\odot O$ 的外位似中心，它也是 $\triangle PQR$ 与 $\triangle ABC$ 的外位似中心，位似比为 $\frac{HP}{HA}=\frac{1}{2}$。(3) $\triangle ABC$ 的重心 G 是 $\odot N$ 与 $\odot O$ 的内位似中心，它也是 $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 的内位似中心，位似比为 $\frac{GD}{GA}=\frac{1}{2}$。

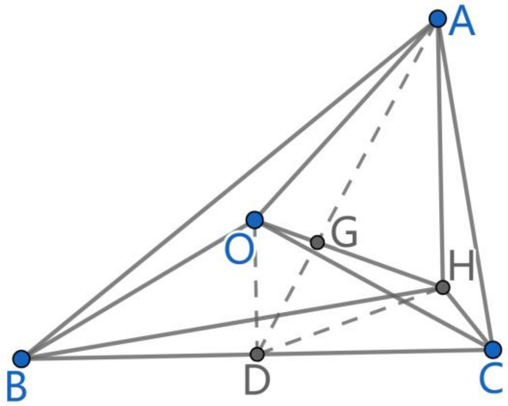
性质 2. 以垂心四点组 (A,B,C,H) 为顶点构成的四个三角形 $\triangle ABC$， $\triangle ABH$， $\triangle ACH$， $\triangle BCH$ 有一个公共的九点圆。

性质 3. （1）设 $\triangle ABC$ 的外心为 O，内心为 I，点 A,B,C 所对的三个旁心分别为 I_A,I_B,I_C。则 $\odot O$ 是垂心四点组 (I,I_A,I_B,I_C) 公共的九点圆。（2）直线 OI 是 $\triangle I_AI_BI_C$ 的欧拉线。



二、例题精讲

例 1. 设锐角 $\triangle ABC$ 的外心和垂心分别为 O,H，求证：$\triangle AOH,\triangle BOH,\triangle COH$ 中有一个的面积等于另外两个面积之和。

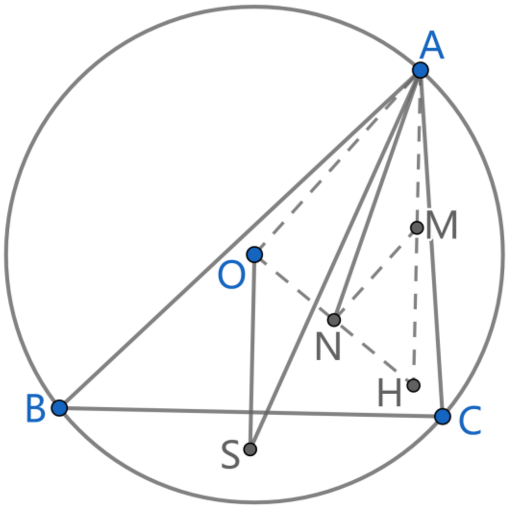


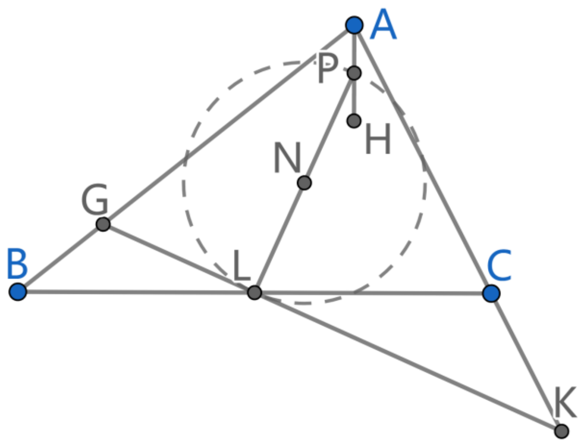
例 2. 设 $\triangle ABC$ 的外心，垂心分别为 O,H。（1）求证： $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$。

（2）设 $\odot O$ 半径为 R，求证： $OH<3R$，并证明右边的 3 不能改成更小的常数。

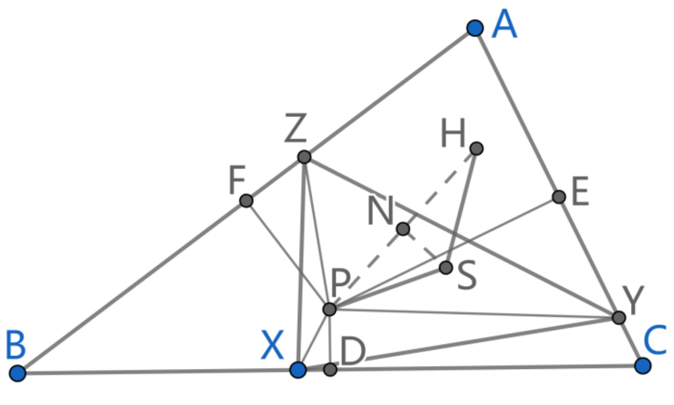
例 3. O, N 分别为$\triangle ABC$的外心与九点圆圆心，S 为$\triangle BOC$的外心。求证：AS, AN 关于$\angle A$的平分线对称。

例 4. 设H为$\triangle ABC$的垂心，L为BC边的中点，P为AH的中点。过L作PL的垂线交AB于G，交AC的延长线于K。求证：G, B, K, C四点共圆。

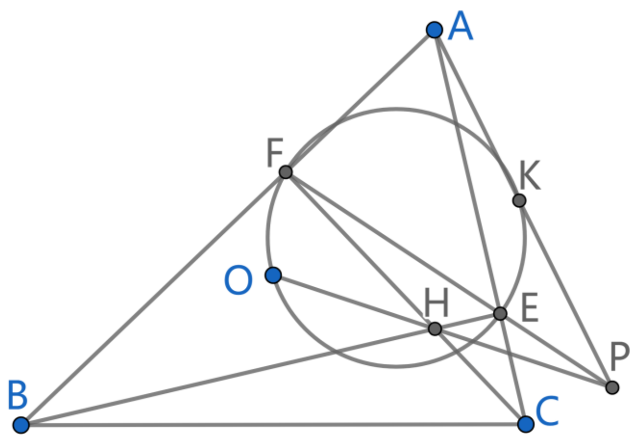




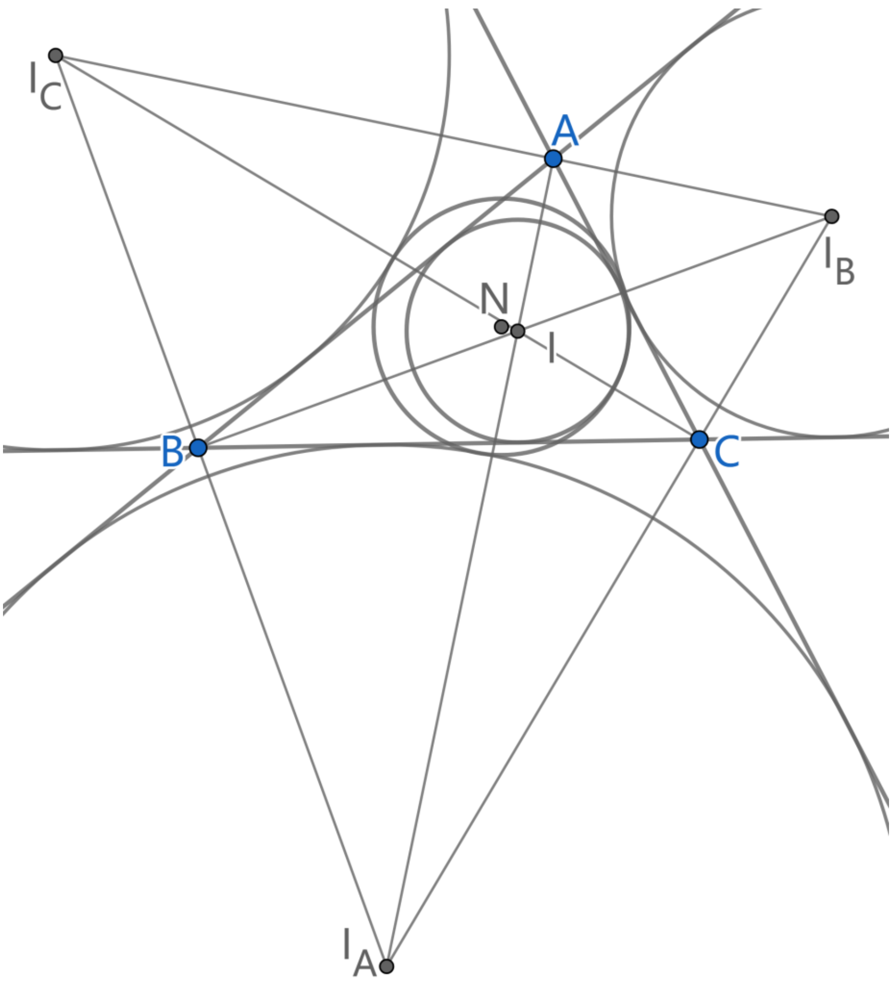
例 5. 点H是$\triangle ABC$的垂心，点X, Y, Z分别在线段BC, CA, AB上，$\triangle XYZ \backsim \triangle ABC$。点$P, S$分别是$\triangle XYZ$的垂心和外心。求证：$PS = SH$。



例 6. 点O是$\triangle ABC$的外心，$\triangle ABC$的两条高BE和CF相交于H，直线OH与EF相交于P。线段OK是$\odot(OEF)$的直径。求证：A, K, P三点共线。



例 7.（费尔巴哈定理）设$\triangle ABC$的九点圆为$\odot N$，内切圆为$\odot I$。求证：(1）$\odot N$与$\odot I$内切。(2）类似地，设$\triangle ABC$三个顶点A,B,C所对的旁切圆分别为$\odot I_A,\odot I_B,\odot I_C$，则$\odot N$分别与$\odot I_A,\odot I_B,\odot I_C$外切。



.