复数的定义与性质

一、知识要点

1. 复数的定义：为了求解 $x^2+1=0$ 这样的没有实根的方程，数学家们引入复数的概念。首先引入一个新数 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，它满足 $\mathrm{i}^2=-1$，称为虚数单位。称形如 $z=a+b\mathrm{i}$，$a,b\in\mathbb{R}$ 的表达式为一个复数，其中 a,b 分别称为 z 的实部和虚部，记作 $\mathrm{Re}(z)=a$，$\mathrm{Im}(z)=b$。所有复数组成的集合记为 $\mathbb{C}$，$\mathbb{C}=\{a+b\mathrm{i},a,b\in\mathbb{R}\}$。

2. 复数的加减乘法：设 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}$，我们对它们的加减乘法定义如下：（1）加法：$z_1+z_2=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}$；（2）减法：$z_1-z_2=(a-c)+(b-d)\mathrm{i}$；（3）乘法：$z_1z_2=ac-bd+(ad+bc)\mathrm{i}$。加法满足交换律 $z_1+z_2=z_2+z_1$，和结合律 $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$。乘法满足交换律 $z_1z_2=z_2z_1$，结合律 $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$ 和对加法的分配律 $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$。

3. 复数的共轭与模：设 $z=a+b\mathrm{i},a,b\in\mathbb{R}$，（1）定义它的共轭复数为 $\overline{z}=a-b\mathrm{i}$。（2）定义它的模为 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$。我们有下列性质：（1）$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z}_1\pm\overline{z}_2$，$\overline{z_1z_2}=\overline{z}_1\overline{z}_2$，$\mathrm{Re}(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$，$\mathrm{Im}(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$，$z\overline{z}=|z|^2$；（2）三角不等式 $||z_1|-|z_2||\le|z_1\pm z_2|\le|z_1|+|z_2|$；（3）$|z|\ge\max(|\mathrm{Re}(z)|,|\mathrm{Im}(z)|)$。

4. 复数的除法：设 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}\ne0$，我们希望定义它们的商 $\dfrac{z_1}{z_2}$，使它满足 $\dfrac{z_1}{z_2}\cdot z_2=z_1$。由上式得 $\dfrac{z_1}{z_2}\cdot(c^2+d^2)=\dfrac{z_1}{z_2}\cdot z_2\overline{z_2}=z_1\overline{z_2}=ac+bd+(bc-ad)\mathrm{i}$，所以 $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2}=\dfrac{ac+bd+(bc-ad)\mathrm{i}}{c^2+d^2}$。我们有如下性质：$\overline{(\dfrac{z_1}{z_2})}=\dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$。

5. 复数的几何形式：复数 $z=a+b\mathrm{i},a,b\in\mathbb{R}$ 与复平面上的点 $Z(a,b)$ 是一一对应的，和向量 $\overrightarrow{OZ}$ 也一一对应。点 Z 和向量 $\overrightarrow{OZ}$ 均是复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的几何形式。

6. 复数的三角形式：设复数 $z=a+b\mathrm{i}, a,b\in\mathbb{R}$ 对应的向量为 $\overrightarrow{OZ}$，称始边为 x 轴正半轴，终边为 $\overrightarrow{OZ}$ 的角为复数 z 的辐角，记为 $\mathrm{Arg}(z)$。设 $|z|=r\ge 0, \mathrm{Arg}(z)=\theta$，则 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，这称为复数 z 的三角形式。$r>0$ 时，我们有 $\cos\theta=\dfrac{a}{r},\sin\theta=\dfrac{b}{r}$。满足 $0\le\theta<2\pi$ 的辐角 θ 的值称为 z 的辐角主值，记作 $\arg(z)$。

7. 复数在三角形式下乘除法的运算法则：设 $z_1=a+b\mathrm{i}=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=c+d\mathrm{i}=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，则（1）乘法：$z_1z_2=r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2$ $+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2))=r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2))$；（2）除法：因为 $\overline{z_2}=c-d\mathrm{i}=r_2(\cos\theta_2-\mathrm{i}\sin\theta_2)=r_2(\cos(-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(-\theta_2))$，所以 $z_2\neq 0$ 时，

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2}=\frac{r_1r_2(\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2))}{r_2^2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2))$$。

8. 复指数函数：（1）对任意实数 x，定义 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$，这被称为欧拉公式；（2）对任意复数 $z=x+\mathrm{i}y$，定义 $\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x\cdot(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$。对任意实数 x_1,x_2，我们有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x_1+x_2)}=\cos(x_1+x_2)+\mathrm{i}\sin(x_1+x_2)=(\cos x_1+\mathrm{i}\sin x_1)(\cos x_2+\mathrm{i}\sin x_2)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_2}$。于是对任意复数 z_1,z_2，有 $\mathrm{e}^{z_1+z_2}=\mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$。

9. 复数的指数形式：任意复数 z 可以表示为 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，其中 $r=|z|\ge 0, \theta=\mathrm{Arg}(z)\in\mathbb{R}$，这称为复数的指数形式。在指数形式下，设 $z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}, r_1,r_2\ge 0, \theta_1,\theta_2\in\mathbb{R}$，则有（1）乘法：$z_1z_2=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$；（2）除法：$z_2\neq 0$ 时，$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{i(\theta_1-\theta_2)}$；（3）乘方：设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$，这被称为棣莫佛公式；（4）共轭复数：设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $\overline{z}=r(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)=r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$。由上述法则知 $|z_1||z_2|=|z_1z_2|$，$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$。特别地，因为

$|a+b\mathrm{i}||c+d\mathrm{i}|=|(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})|=|ac-bd+(ad+bc)\mathrm{i}|$，同理，

$|a+b\mathrm{i}||c-d\mathrm{i}|=|ac+bd+(bc-ad)\mathrm{i}|$，于是我们得到下列二平方和恒等式

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2$。

9. 复数四则运算的几何意义：（1）复数加减法的法则与复平面上向量的加减法相同。（2）设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则对任意复数 w， zw 由向量 w 模长乘以 r，再逆时针旋转角 θ 得到。设 $A(1,0)$，复数 z,w,zw 分别对应点 Z,W,U，则有 $\triangle OAZ\backsim\triangle OWU$，且它们的定向相同。（3）设 $z_1,z_2\in\mathbb{C}$，则 $|z_1-z_2|$ 为复平面上 z_1,z_2 两点的距离。

10. 单位根：设 n 为正整数， $\epsilon_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2k\pi}{n}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}, k=0,1,\dots,n-1$。由棣莫佛公式， $\epsilon_k^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}\cdot n}=1, k=0,1,\dots,n-1$。所以 $\{\epsilon_k, 0\le k\le n-1\}$ 是方程 $z^n-1=0$ 的 n 个不同的复根，称它们为 n 次单位根。由一元多项式的知识内容， z^n-1 有 n 个不同的一次因式 $z-\epsilon_k, 0\le k\le n-1$，所以 $\prod\limits_{k=0}^{n-1}(z-\epsilon_k)$ 整除 z^n-1，它们的次数都为 n 且首项系数都为 1。于是它们相等，有因式分解 $z^n-1=\prod\limits_{k=0}^{n-1}(z-\epsilon_k)=\prod\limits_{k=0}^{n-1}(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}})$。

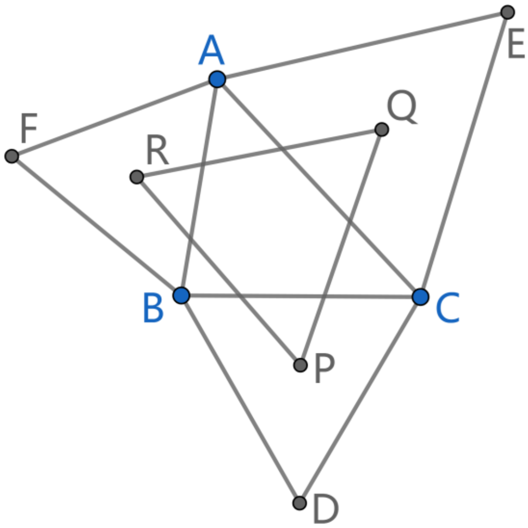
二、例题精讲

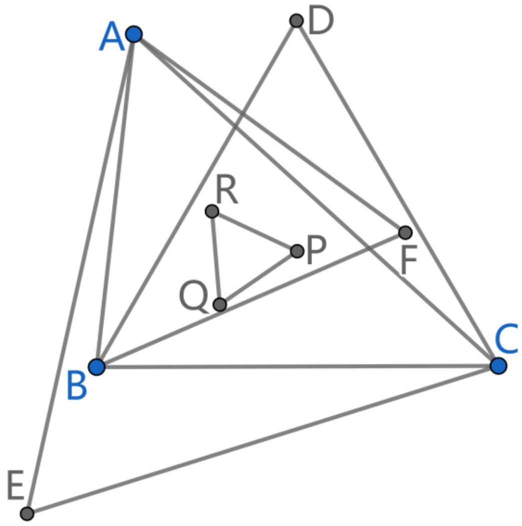
例 1. （1）求证： $a\times b$ 的长方形可以用 $1\times n$ 的长方形覆盖，当且仅当 $n\mid a$ 或 $n\mid b$；（2）空间中 $a\times b\times c$ 的盒子可以用 $n\times1\times1$ 的长条装满，求证： $n\mid a$ 或 $n\mid b$ 或 $n\mid c$。尝试分别用复数法和染色法对这两问给出证明。

例 2. 设 $x,y,z>0$，求证：$\sum xy\sqrt{x^2+y^2+xy}\geq\prod\sqrt{x^2+y^2+xy}$，并确定等号成立条件。

例 3. 求最小的实数 c，使得对任意正整数 $n\geq 2$ 和任意 n 个和为 0 的非零复数 $z_1,z_2,\ldots,z_n$，均存在下标 $i\neq j$，使得 $|z_i^2+z_j^2|\leq c|z_iz_j|$。

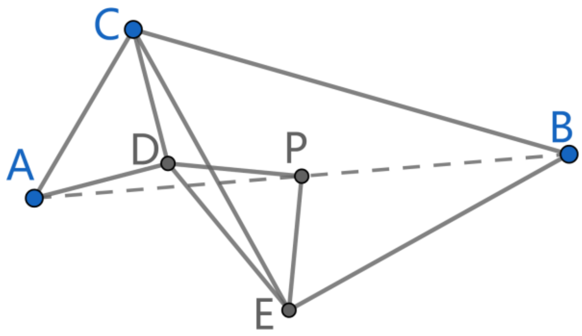
例 4.（拿破仑定理）以任意三角形的三边为底边向外（或向内）作三个正三角形，则这三个正三角形的中心构成正三角形。尝试分别给出三角法和复数法的证明。

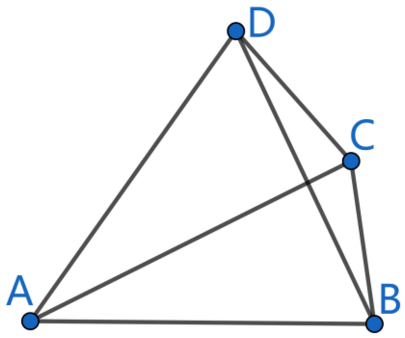




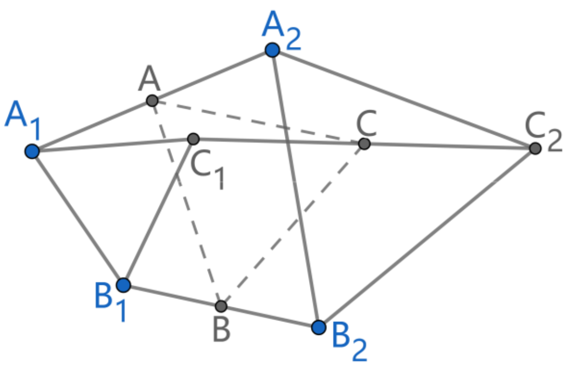
例 5.（2024，高联预赛广西）如图，$AD=CD$，$DP=EP$，$BE=CE$，$\angle ADC=\angle DPE=\angle BEC=\dfrac{\pi}{2}$。求证：$P$ 为线段 AB 的中点。

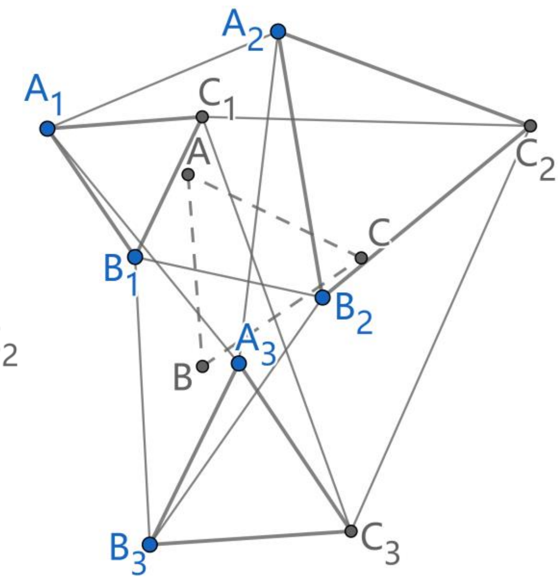
例 6.（托勒密不等式）在任意凸四边形 $ABCD$ 中，求证：$AB\cdot CD+AD\cdot BC\geq AC\cdot BD$，并说明等号成立当且仅当 A,B,C,D 四点共圆。



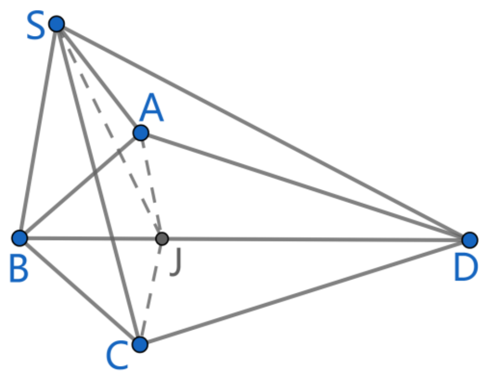


例 7.（爱可尔斯定理）(1) 若$\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$都是正三角形且定向相同，则线段$A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$的中点$A, B, C$也构成正三角形。(2) 若$\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2, \triangle A_3B_3C_3$都是正三角形且定向相同，则$\triangle A_1A_2A_3, \triangle B_1B_2B_3, \triangle C_1C_2C_3$的重心也构成正三角形。注：可以由 (2) 推出拿破仑定理，在例 4 的插图记号下令点$A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$分别是$F, B, A, B, D, C, A, C, E$即可。





例 8. 点A在凸四边形$SBCD$的内部，$AB=BC$，$AD=CD$，$\angle ASD=\angle BSC$。求证：$\dfrac{BS}{DS}=\dfrac{AB}{AD}$。



三、拓展阅读

1. 使用抽象代数的语言，复数和它上面的加法、乘法由同构

$\mathbb{C}=\mathbb{R}[\sqrt{-1}]=\mathbb{R}[\mathrm{i}]\cong\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ 给出，即实数域上的一元多项式环商掉由 x^2+1 生成的理想。这可以作为复数环的定义。

2. 欧拉公式的来历：分别对 $f(x)=\cos x, g(x)=\sin x$ 在 $x_0=0$ 处做泰勒展开。因为

$f(x),g(x)$ 的各阶导数为 $f^{(2k)}(x)=(-1)^k\cos x,\ f^{(2k+1)}(x)=(-1)^{k+1}\sin x$，

$g^{(2k)}(x)=(-1)^k\sin x,\ g^{(2k+1)}(x)=(-1)^k\cos x$，所以

$f^{(2k)}(0)=(-1)^k,\ f^{(2k+1)}(0)=0,\ g^{(2k)}(0)=0,\ g^{(2k+1)}(0)=(-1)^k$。由泰勒展开公式，

$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+\ldots=\sum\limits_{k\ge0}\dfrac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$， $\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+\ldots=\sum\limits_{k\ge0}\dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$。另一边，设 $h(x)=\mathrm{e}^x$，则它的各阶导数为 $h^{(n)}(x)=\mathrm{e}^x, h^{(n)}(x)=1, n\ge0$，所以由泰勒展开公式，$\mathrm{e}^x=\sum\limits_{n\ge0}\dfrac{x^n}{n!}$。设 $y\in\mathbb{R}$，在欧拉以前人们不知道 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ 是何物。欧拉做了一件事，就是将

$x=\mathrm{i}y$ 强行代入 e^x 的泰勒展开，以此定义 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$，得到 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}=\sum\limits_{n\ge0}\dfrac{(\mathrm{i}y)^n}{n!}$

$=\sum\limits_{k\ge0}\dfrac{(\mathrm{i}y)^{2k}}{(2k)!}+\sum\limits_{k\ge0}\dfrac{(\mathrm{i}y)^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sum\limits_{k\ge0}\dfrac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!}+\mathrm{i}\sum\limits_{k\ge0}\dfrac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!}=\cos y+\mathrm{i}\sin y$。于是我们从正弦、余弦和指数函数的泰勒展开推出了欧拉公式。