调和点列与完全四边形

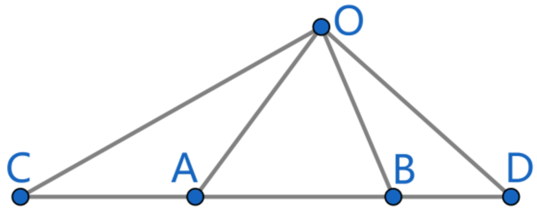
前言：我计划用三份讲义介绍有关交比、调和点列与调和线束、完全四边形、圆锥曲线的极点与极线、调和四边形的基础知识。这些内容属于平面射影几何的重要知识。十几年前，它们几乎只出现在高等几何学的教材中，命题人偶尔提供一道以射影几何为背景的竞赛题就能让选手们集体阵亡。近年来，随着时代的发展，越来越多的高中平面几何教材开始系统地讲解这些与射影几何有关的内容，以此为背景的竞赛题变得屡见不鲜，它们也成为了今天数学竞赛的高手们必备的武器。

一、知识要点

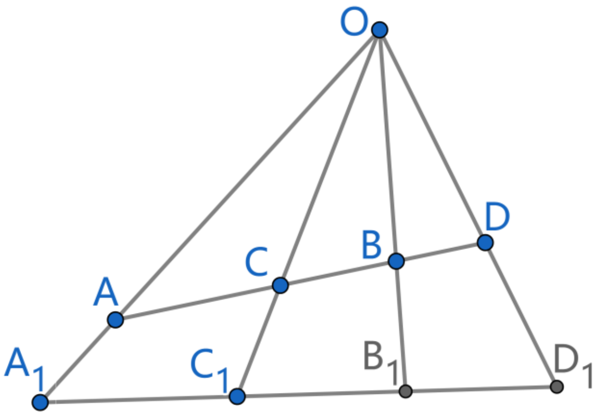
定义 1. 共点于O的四条直线被任一直线所截的有向线段比$(A,B;C,D)=\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}$称为线束$OA,OB;OC,OD$或点列$A,B;C,D$的交比。

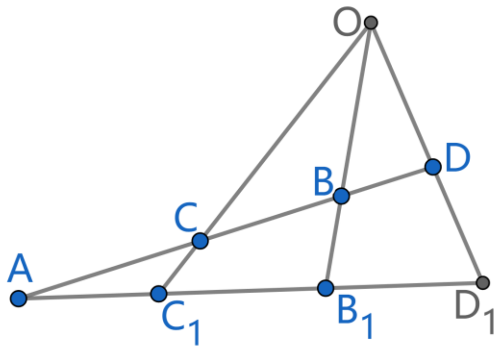
性质 1. 设$A,B;C,D$为直线l上的四个点，O为直线l外一点，则

$(A,B;C,D)=\frac{AC}{BC}\Big/\frac{AD}{BD}=\frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle BOC}\Big/\frac{\sin\angle AOD}{\sin\angle BOD}$。上式中我们使用有向线段和有向角的约定，$\angle AOC,\angle BOC$定向相同时$\frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle BOC}>0$，否则$\frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle BOC}<0$。



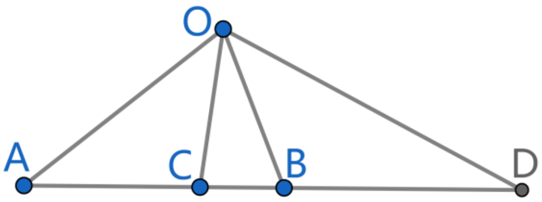
推论 1. 共点于O的四条直线被直线l,l_1所截，l上的交点为A,B,C,D，l_1上的交点为A_1,B_1,C_1,D_1，则$(A,B;C,D)=(A_1,B_1;C_1,D_1)$，即线束的交比与所截直线无关。

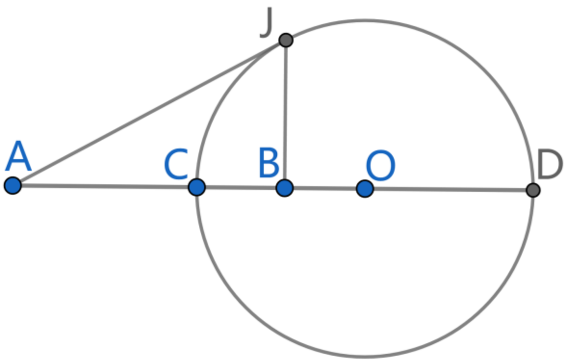




注：上述推论在A,A_1重合时的逆命题也成立：若两个点列$A,B;C,D$，$A,B_1;C_1,D_1$满足$(A,B;C,D)=(A_1,B_1;C_1,D_1)$，则$BB_1,CC_1,DD_1$三线平行或共点。

定义 2. 交比 $(A,B;C,D)=-1$, 即有向线段比 $\dfrac{AC}{BC}=-\dfrac{AD}{BD}$ 的线束 $OA,OB;OC,OD$ 称为调和线束，点列 $A,B;C,D$ 称为调和点列，也称 A,B 被 C,D 调和分割。由性质 1，上式即有向角的正弦之比 $\dfrac{\sin\angle AOC}{\sin\angle BOC}=-\dfrac{\sin\angle AOD}{\sin\angle BOD}$ 。





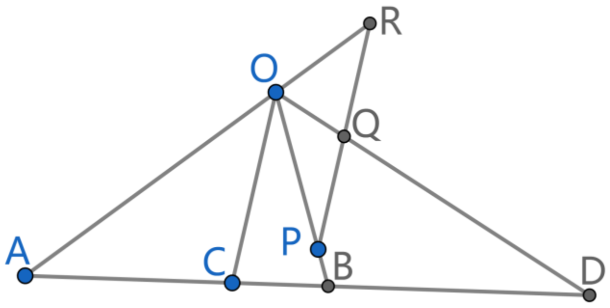
性质 2. 若 $A,B;C,D$ 成调和点列， O 是 CD 中点，则 O 在 A,B 同侧，且有：

（1） $\dfrac{2}{AB}=\dfrac{1}{AD}+\dfrac{1}{AC}$ ；（2） $OC^2=OD^2=OA\cdot OB$ ；

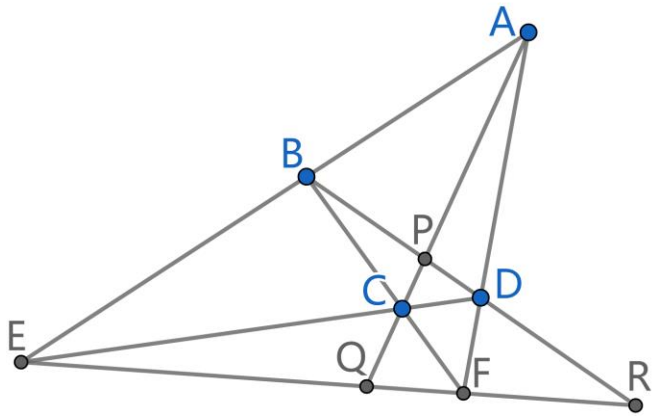
（3） $AC\cdot AD=AB\cdot AO$ ；（4） $AB\cdot OD=AC\cdot BD$ ；

.其中（1）式意为 AB 是 AC,AD 的调和平均，这是调和点列称谓的由来。事实上，假设 A,C,B,D 是直线上依次排列的四个点， O 是 CD 中点且 O 在 A,B 同侧，则上述四式中的任何一个都能推出 $A,B;C,D$ 成调和点列。

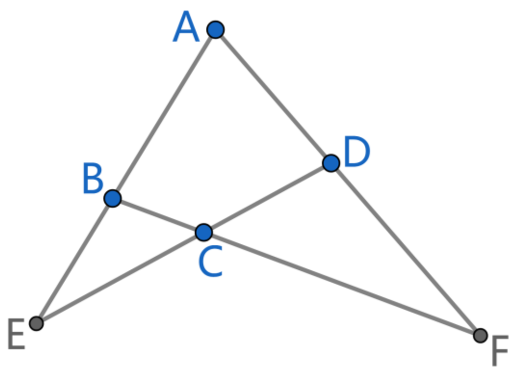
性质 3. 设 $OA,OB;OC,OD$ 为调和线束，一直线 l 分别与 OB,OD,OA 交于点 P,Q,R，则 $PQ=QR$ 当且仅当 $l/\!/OC$ 。也就是说，一直线被调和线束中的三条平分当且仅当它与线束中的第四条线平行。



性质 4. 设四边形 $ABCD$ 中，AB 交 CD 于 E，AD 交 BC 于 F，对角线 AC 与另外两条对角线 BD,EF 的交点为 P,Q，则 $A,C;P,Q$ 为调和点列。同理，设 BD 与 EF 交与点 R，则 $B,D;P,R$ 为调和点列， $E,F;Q,R$ 为调和点列。



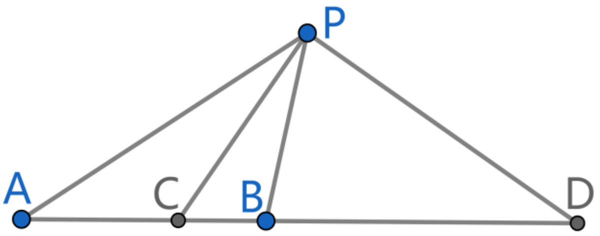
定义 3. 设平面上有两两相交，且没有三线共点的四条直线，它们之间有六个交点，则称它们构成的图形为完全四边形。

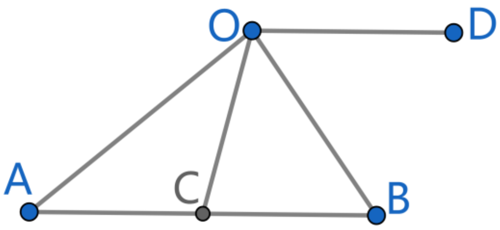


回忆：（1）四边形的密克定理说上述四条直线围成的四个三角形的外接圆交于一点。
（2）牛顿定理说完全四边形的三条对角线中点共线。

（3）我们曾经做过一道题，要证明图中$\dfrac{[ABD]}{[BCD]}=\dfrac{[AEF]}{[CEF]}$，这就是性质 4。

调和点列与调和线束之所以重要，是因为它自然地出现在许多看似简单且与它无关的构图中，我们列举如下：（1）$\triangle PAB$中设PC是内角平分线，PD是外角平分线，则$A,B;C,D$是调和点列；（2）$\triangle OAB$中C为AB中点，$OD/\!/AB$，则$OA,OB;OC,OD$是调和线束；（3）性质 4 说任意完全四边形的任意一条对角线被另外两条对角线调和分割。（4）在例 3 的插图，过圆外一点P作圆的割线PCD，设它与点P的切点弦AB交于点Q，则$P,Q;C,D$为调和点列。

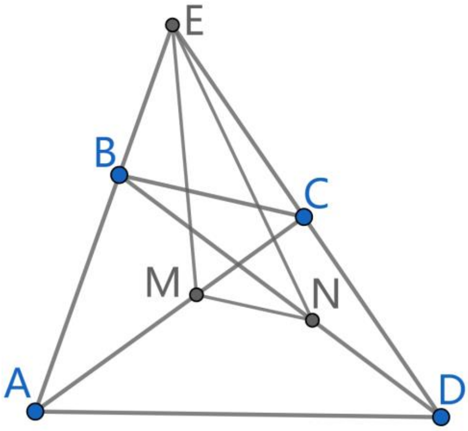


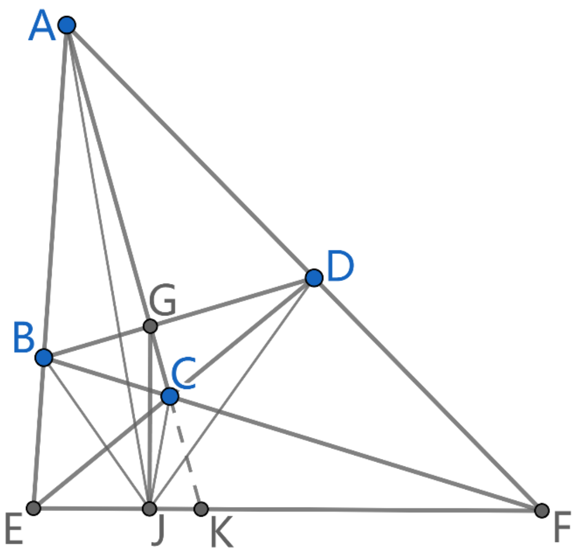


二、例题精讲

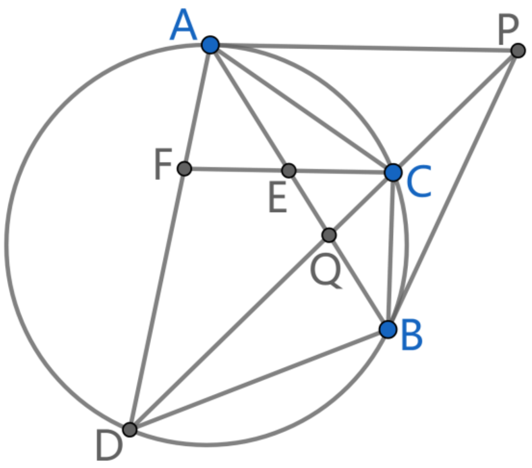
例 1. 四边形$ABCD$中，点M,N分别在AC和BD上，满足$\dfrac{AM}{MC}=\dfrac{BN}{ND}=\dfrac{3}{2}$，直线$AB$与$DC$相交于点$E$，四边形$ABCD$的面积为$25$。求$\triangle EMN$的面积。

例 2. （2002，中国集训队）在四边形$ABCD$中，AB交CD于E，AD交BC于F，设AC交BD于G，$GJ\perp EF$于点J，求证：$\angle BJA=\angle DJC$。

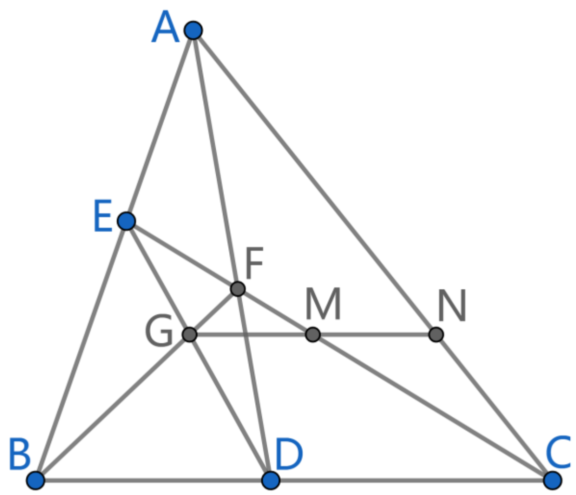




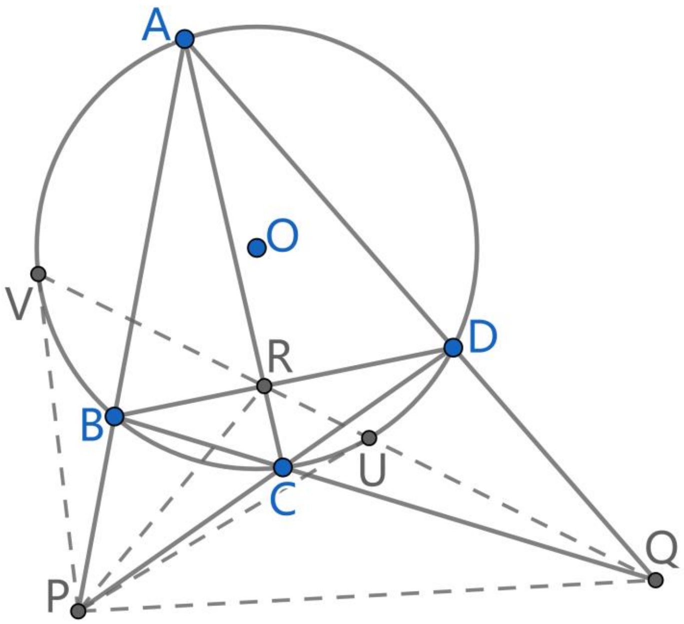
例 3.（2006，国家队培训）P 为$\odot O$外一点，PA,PB 为$\odot O$的两条切线，PCD 为任意一条割线。(1) 设 AB 与 CD 交于点 Q，求证：$\dfrac{2}{PQ}=\dfrac{1}{PC}+\dfrac{1}{PD}$；(2) 作 CF 平行于 PA 且与 AB 交于点 E，与 AD 交于点 F，求证：$CE=EF$。



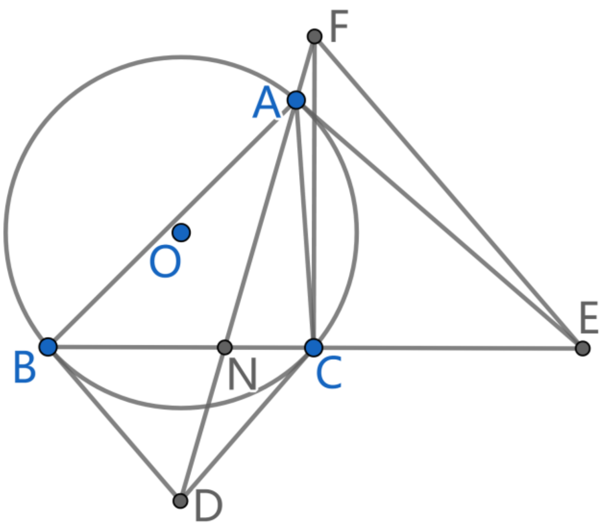
例 4. 点 D,E 分别在$\triangle ABC$的边 BC,AB 上，AD,CE 相交于 F，BF,DE 相交于 G，过 G 作 BC 的平行线，分别与直线 CE,AC 相交于 M,N。求证：$GM=MN$。



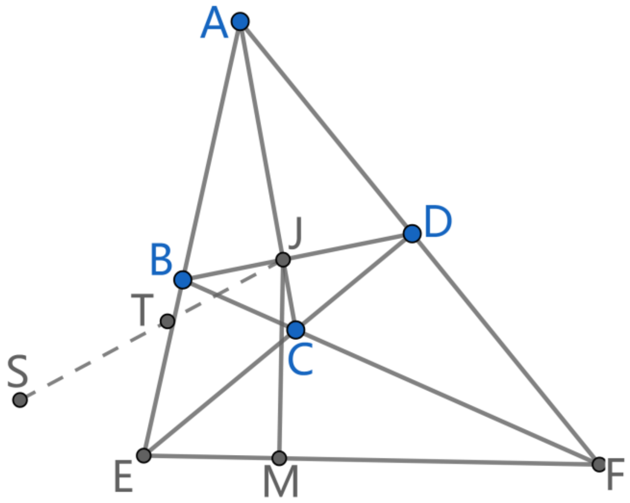
例 5.（Brocard 定理）在圆内接四边形$ABCD$中，AB交CD于P，AD交BC于Q，AC交BD于点R，则P,Q,R,O构成垂心四点组（即任意一点是其余三点的垂心）。



例 6. $\triangle ABC$内接于$\odot O$，过B,C作$\odot O$的切线交于点D，过A作$\odot O$的切线与BC交于点E，过C作BC垂线与直线DA交于点F。求证：$\angle CEF = A$。



例 7. 在四边形 $ABCD$ 中， AB 交 CD 于 E， AD 交 BC 于 F， 设 AC 交 BD 于 J， $JM\perp EF$ 于点 M， M 关于 AB,CD 的对称点分别为 S,T 。求证： S,T,J 三点共线。

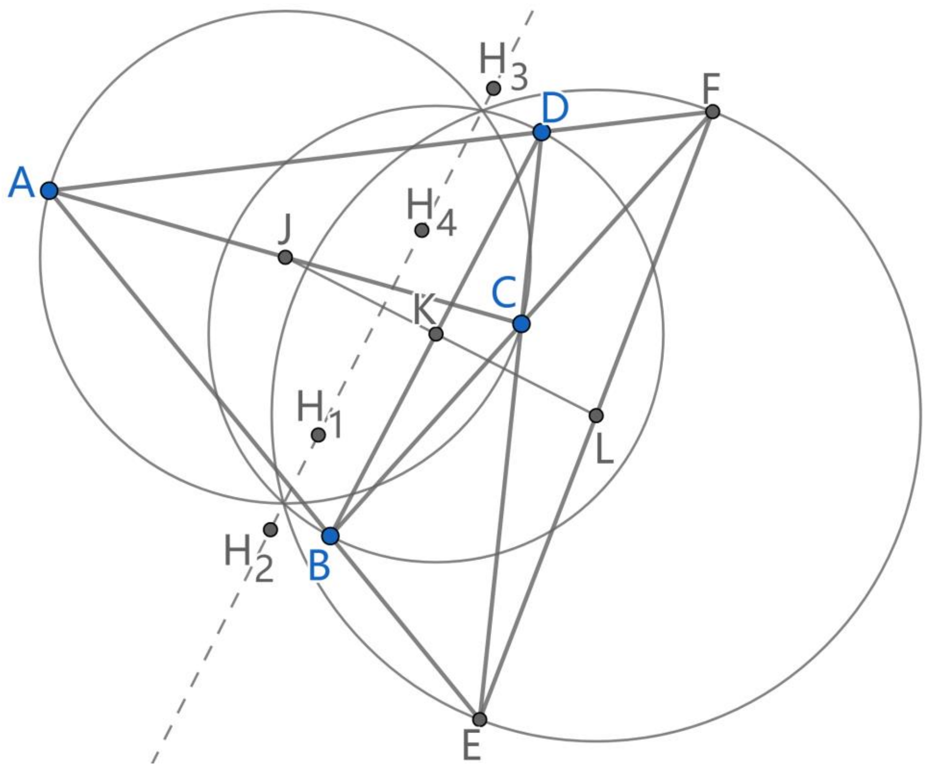


例 8. 在四边形 $ABCD$ 中， AB 交 CD 于 E， AD 交 BC 于 F 。

（1）设 $\triangle ABF,\triangle BCE,\triangle CDF,\triangle ADE$ 的垂心分别为 H_1,H_2,H_3,H_4，求证：上述四点共线，称为完全四边形的垂心线。

（2）（高斯-Bodenmiller 定理）以完全四边形的三条对角线 AC,BD,EF 为直径的三个圆共轴，该根轴就是其垂心线。

（3）回忆：完全四边形三条对角线的中点共线，称为牛顿线，则牛顿线与垂心线垂直。



例 9.（2010，高联）已知锐角$\triangle ABC$的外心为O， K是边BC上一点，且不是BC中点，D是线段AK延长线上一点，直线BD与AC交于点N，直线CD与AB交于点M。求证：若$OK\perp MN$，则A,B,C,D四点共圆。