2020 年全国高中数学联合竞赛一试（B 卷）

1. 若实数 x 满足 $\log_2 x = \log_4(2x) + \log_8(4x)$，则 $x =$ ________.

2. 在平面直角坐标系 xOy 中，圆 Ω 经过点 $(0,0),(2,4),(3,3)$，则圆 Ω 上的点到原点的距离的最大值为________.

3. 设集合 $X = \{1,2,\cdots,20\}$，A 是 X 的子集，A 的元素个数至少是 2，且 A 的所有元素可排成连续的正整数，则这样的集合 A 的个数为________.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，$BC = 4, CA = 5, AB = 6$，则 $\sin^6 \dfrac{A}{2} + \cos^6 \dfrac{A}{2} =$ ________.

5. 设 9 元集合 $A = \{a + bi \mid a, b \in \{1,2,3\}\}$，其中 i 是虚数单位.$\alpha = (z_1, z_2, \cdots, z_9)$ 是 A 中所有元素的一个排列，满足 $|z_1| \le |z_2| \le \cdots \le |z_9|$，则这样的排列 α 的个数为________.

6. 已知一个正三棱柱的各条棱长均为 3，则其外接球的体积为________.

7. 在凸四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD}$，点 P 是四边形 $ABCD$ 所在平面上一点，满足 $\overrightarrow{PA} + 2020\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + 2020\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{0}$. 设 s, t 分别为四边形 $ABCD$ 与 $\triangle PAB$ 的面积，则 $\dfrac{t}{s} =$ ________.

8. 已知首项系数为 1 的五次多项式 $f(x)$ 满足：$f(n) = 8n, n = 1, 2, \cdots, 5$，则 $f(x)$ 的一次项系数为________.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9.（本题满分 16 分）在椭圆 Γ 中，A 为长轴的一个端点，B 为短轴的一个端点，F_1, F_2 为两个焦点. 若 $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}+\overrightarrow{BF_1}\cdot\overrightarrow{BF_2}=0$，求 $\tan\angle ABF_1\cdot\tan\angle ABF_2$ 的值.

10.（本题满分 20 分）设正实数 a,b,c 满足 $a^2+4b^2+9c^2=4b+12c-2$，求 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}$ 的最小值.

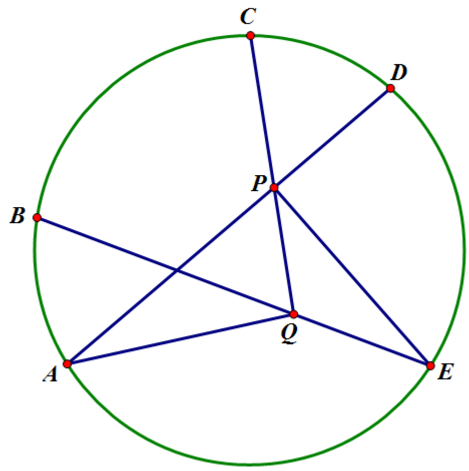
11.（本题满分 20 分）设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], n=1,2,\cdots.$$

求证：存在无穷多个正整数 m，使得 $a_{m+4}a_m-1$ 是完全平方数.

2020 年全国高中数学联合竞赛加试（B 卷）

一、（本题满分 40 分） 如图，A,B,C,D,E 是圆 Ω 上顺次的五点，满足 $\overset{\frown}{ABC}=\overset{\frown}{BCD}=\overset{\frown}{CDE}$. 点 P,Q 分别在线段 AD,BE 上，且 P 在线段 CQ 上. 求证：$\angle PAQ=\angle PEQ$.



二、（本题满分 40 分） 设集合 $A=\{1,2,\cdots,19\}$. 是否存在 A 的非空子集 S_1,S_2，满足

(1) $S_1\cap S_2=\emptyset, S_1\cup S_2=A$;

(2) S_1,S_2 都至少有 4 个元素;

(3) S_1 的所有元素的和等于 S_2 的所有元素的乘积？

三、（本题满分 50 分） 给定整数 $n\geq 2$. 设正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 满足

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n,$$

且对任意 $1\leq i<j\leq n$，均有 $a_ia_j\geq b_i+b_j$. 求 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 的最小值.

四、（本题满分 50 分） 设 a,b 是不超过 12 的正整数，满足：存在常数 C，使得 $a^n+b^{n+9}\equiv C \pmod{13}$ 对任意正整数 n 成立. 求所有满足条件的有序数对 (a,b).