看解答 上微信小程序 搜数之谜

2021 年全国高中数学联合竞赛一试（A2 卷）

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 若等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1-a_2=3, a_1-a_3=2$，则 $\{a_n\}$ 的公比为________.

2. 函数 $f(x)=2\sin^2 x-\tan^2 x$ 的最大值为________.

3. 若圆锥的高为 5，侧面积为 30π，则该圆锥的体积为________.

4. 在边长为 1 的正六边形的六个顶点中随机取出三个顶点，则这三点中有两点的距离为 $\sqrt{3}$ 的概率为________.

5. 复数 $z_1, z_2, \cdots, z_{100}$ 满足：$z_1=3+2i, z_{n+1}=\overline{z_n}\cdot i^n(n=1,2,\cdots,99)$（$i$ 为虚数单位），则 $z_{99}+z_{100}$ 的值为________.

6. 定义域为 $\mathbb{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足：当 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)=2^x-x$，且对任意实数 x，均有 $f(x)+f(x+1)=1$. 记 $a=\log_2 3$，则 $f(a)+f(2a)+f(3a)$ 的值为________.

7. 设集合 $S=\{1,2,\cdots,10\}$，S 的子集 A 满足 $A\cap\{1,2,3\}\neq\emptyset, A\cup\{4,5,6\}\neq S$，这样的子集 A 的个数为________.

8. 在平面直角坐标系 xOy 中，Γ_1 是以 $(2,1)$ 为圆心的单位圆，Γ_2 是以 $(10,11)$ 为圆心的单位圆. 过原点 O 作一条直线 l，使得 l 与 Γ_1,Γ_2 各有两个交点，将 Γ_1,Γ_2 共分成四段圆弧，且这四段圆弧中有两段等长. 所有满足条件的直线 l 的斜率之和为________.

看解答 上微信小程序 搜数之谜

看解答 上微信小程序 搜数之谜

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9.（本题满分 16 分） 已知 $\triangle ABC$ 满足 $AB=1, AC=2, \cos B+\sin C=1$，求 BC 边的长.

10.（本题满分 20 分） 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $\Gamma: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$. 设 A 为 Γ 的一个长轴端点，B 为 Γ 的一个短轴端点，F 为 Γ 的一个焦点. 已知 Γ 上存在关于 O 对称的两点 P, Q，使得 $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}+\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=|AB|^2$.

(1) 求证：F 在 AO 的延长线上；

(2) 求 Γ 的离心率的取值范围.

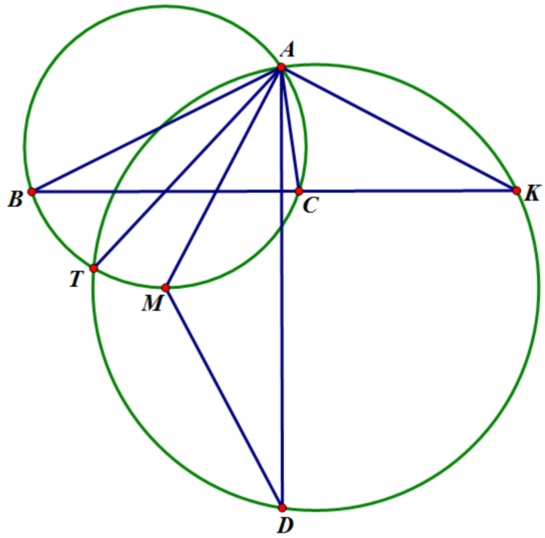
11.（本题满分 20 分） 设 a, b 为实数，函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$. 若存在三个实数 x_1, x_2, x_3 满足 $x_1+1\leq x_2\leq x_3-1$，且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，求 $|a|+2|b|$ 的最小值.

看解答 上微信小程序 搜数之谜

看解答 看讨论 上微信小程序 搜数之谜

2021 年全国高中数学联合竞赛加试（A2 卷）

一、**（本题满分 40 分）**如图，在锐角 $\triangle ABC$ 中，$AB > AC$，M 是 $\triangle ABC$ 外接圆 Ω 劣弧 BC 的中点，K 是 $\angle BAC$ 的外角平分线与 BC 延长线的交点. 在过 A 且垂直于 BC 的直线上取一点 D（异于 A），使得 $DM = AM$. 设 $\triangle ADK$ 的外接圆与圆 Ω 相交于不同于 A 的点 T，求证：AT 平分线段 BC.



二、**（本题满分 40 分）**求具有下述性质的最大正数 $M > 1$：在区间 $[1, M]$ 中任意取 10 个不同的实数，均可从中选取三个数，从小到大记为 $a < b < c$，使得一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 无实根.

三、**（本题满分 50 分）**给定整数 $n \geq 2$. 设非负实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n, a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n$. 求 $a_1 + a_1a_2 + a_1a_2a_3 + \cdots + a_1a_2\cdots a_n$ 的最小值.

四、**（本题满分 50 分）**将连续 k 个正整数从小到大依次写下后构成一个正整数，称为 $k-$连续数. 例如依次写下 $99, 100, 101$ 后得到 99100101，是一个 3−连续数.

求证：对任意正整数 N, k，存在一个 $k-$连续数能被 N 整除.

看解答 看讨论 上微信小程序 搜数之谜