2021 年全国高中数学联合竞赛一试（A 卷）

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 设等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{2021}=a_{20}+a_{21}=1$，则 a_1 的值为________.

2. 设集合 $A=\{1,2,m\}$，其中 m 为实数. 令 $B=\{a^2 \mid a\in A\}, C=A\cup B$. 若 C 的所有元素之和为 6，则 C 的所有元素之积为________.

3. 设函数 $f(x)$ 满足：对任意非零实数 x，均有 $f(x)=f(1)\cdot x+\dfrac{f(2)}{x}-1$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值为________.

4. 设函数 $f(x)=\cos x+\log_2 x(x>0)$，若正实数 a 满足 $f(a)=f(2a)$，则 $f(2a)-f(4a)$ 的值为________.

5. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=1, AC=2, B-C=\dfrac{2\pi}{3}$，则 $\triangle ABC$ 的面积为________.

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $\Gamma: y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，过 Γ 上一点 P（异于 O）作 Γ 的切线，与 y 轴交于点 Q. 若 $|FP|=2, |FQ|=1$，则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 的值为________.

7. 一颗质地均匀的正方体骰子，六个面上分别标有点数 $1,2,3,4,5,6$. 随机地抛掷该骰子三次（各次抛掷结果互相独立），所得的点数依次为 a_1,a_2,a_3，则 $|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+|a_3-a_1|=6$ 的概率为________.

8. 设有理数 $r=\dfrac{p}{q}\in(0,1)$，其中 p,q 为互质的正整数，且 pq 整除 3600. 这样的有理数 r 的个数为________.

看解答 上微信小程序 搜数之谜

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

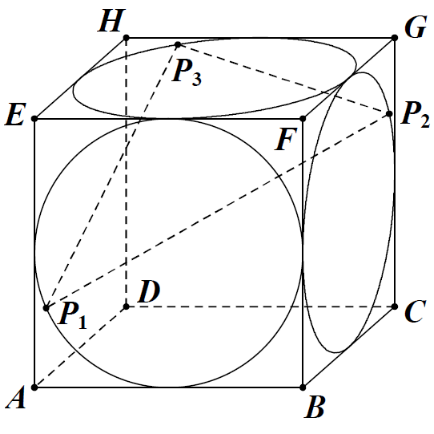
9.（本题满分 16 分）已知复数列 $\{z_n\}$ 满足：

$$z_1=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad z_{n+1}=\overline{z_n}(1+z_n i),n\geq 1,$$

其中 i 为虚数单位. 求 z_{2021} 的值.

10.（本题满分 20 分）在平面直角坐标系中，函数 $y=\dfrac{x+1}{|x|+1}$ 的图像上有三个不同的点位于直线 l 上，且这三点的横坐标之和为 0. 求 l 的斜率的取值范围.

11.（本题满分 20 分）如图，正方体 $ABCD-EFGH$ 的棱长为 2，在正方形 $ABFE$ 的内切圆上任取一点 P_1，在正方形 $BCGF$ 的内切圆上任取一点 P_2，在正方形 $EFGH$ 的内切圆上任取一点 P_3. 求 $|P_1P_2|+|P_2P_3|+|P_3P_1|$ 的最小值与最大值.

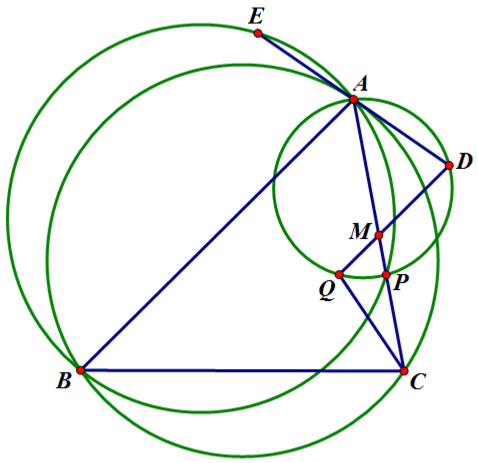


2021 年全国高中数学联合竞赛加试（A 卷）

一、（本题满分 40 分）给定整数 $k \geq 2$ 与 k 个非零实数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$. 求证：至多有有限个 k 元正整数组 $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$，满足 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 互不相同，且

$$a_1 \cdot n_1! + a_2 \cdot n_2! + \cdots + a_k \cdot n_k! = 0.$$

二、（本题满分 40 分）如图，在 $\triangle ABC$ 中，M 是边 AC 的中点. D, E 是 $\triangle ABC$ 的外接圆在 A 处的切线上的两点，满足 $MD \parallel AB$，且 A 是线段 DE 的中点. 过 A, B, E 的圆与边 AC 交于另一点 P，过 A, D, P 的圆与 DM 的延长线交于点 Q. 求证：$\angle BCQ = \angle BAC$.



三、（本题满分 50 分）设整数 $n \geq 4$. 求证：若 n 整除 $2^n - 2$，则 $\dfrac{2^n - 2}{n}$ 是合数.

四、（本题满分 50 分）求具有下述性质的最小正数 c：对任意整数 $n \geq 4$，以及集合 $A \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$，若 $|A| > cn$，则存在函数 $f : A \to \{-1, 1\}$，满足

$$\left| \sum_{a \in A} f(a) \cdot a \right| \leq 1.$$