2021 年全国高中数学联合竞赛一试（B 卷）

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d\neq 0$，且 $a_{2021}=a_{20}+a_{21}$，则 $\dfrac{a_1}{d}$ 的值为________.

2. 设 m 为实数，复数 $z_1=1+2i,z_2=m+3i$（这里 i 为虚数单位）. 若 $z_1\overline{z_2}$ 为纯虚数，则 $|z_1+z_2|$ 的值为________.

3. 当 $\dfrac{\pi}{4}\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$ 时，$y=\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x$ 的取值范围为________.

4. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且对任意 $x\in D$，均有 $f(x)=f(1)\cdot x+f(2)-\dfrac{1}{x}$，则 $f(x)$ 的所有零点之和为________.

5. 设 $a,b,c>1$，满足 $(a^2b)^{\log_a c}=a\cdot(ac)^{\log_a b}$，则 $\log_c(ab)$ 的值为________.

6. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=1,AC=2,\cos B=2\sin C$，则 BC 的长为________.

7. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y=ax^2-3x+3(a\neq 0)$ 的图像与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的图像关于直线 $y=x+m$ 对称，则实数 a,p,m 的乘积为________.

8. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$ 是 $1,2,\cdots,10$ 的一个随机排列，则在 $a_1a_2,a_2a_3,\cdots,a_9a_{10}$ 这 9 个数中既出现 9 又出现 12 的概率为________.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9.（本题满分 16 分）设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a_2 = a_3 = 1$，令 $b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}, n \geq 1$. 若 $\{b_n\}$ 是公比为 3 的等比数列，求 a_{100} 的值.

10.（本题满分 20 分）在平面直角坐标系中，函数 $y = \dfrac{1}{|x|}$ 的图像为 Γ. 设 Γ 上的两点 P, Q 满足：P 在第一象限，Q 在第二象限，且直线 PQ 与 Γ 位于第二象限的部分相切于点 Q. 求 $|PQ|$ 的最小值.

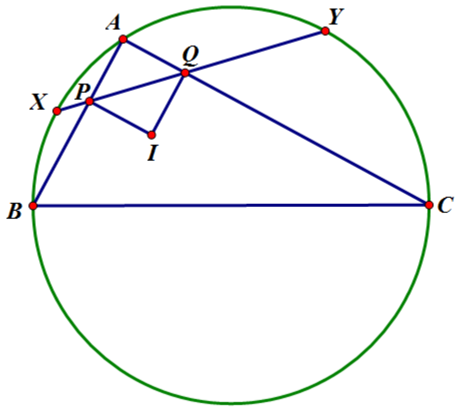
11.（本题满分 20 分）在正 $n(n \geq 3)$ 棱锥 $P - A_1A_2\cdots A_n$ 中，O 为底面正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心，B 为棱 A_1A_n 的中点.

(1) 求证：$PO^2 \sin^2 \dfrac{\pi}{n} + PA_1^2 \cos^2 \dfrac{\pi}{n} = PB^2$；

(2) 设正 n 棱锥 $P - A_1A_2\cdots A_n$ 的侧棱与底面所成的角为 α，侧面与底面所成的角为 β，试确定 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \cos\angle A_iPB$ 与 $\sin\alpha \sin\beta$ 的大小关系，并予以证明.

2021 年全国高中数学联合竞赛加试（B 卷）

一、**（本题满分 40 分）**如图，I 是 $\triangle ABC$ 的内心，点 P,Q 分别为 I 在边 AB,AC 上的投影. 直线 PQ 与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 X,Y（P 在 X,Q 之间）. 已知 B,I,P,X 四点共圆，求证：C,I,Q,Y 四点共圆.



二、**（本题满分 40 分）**求最大的正整数 n，使得存在 8 个整数 x_1,x_2,x_3,x_4 和 y_1,y_2,y_3,y_4，满足：

$$\{0,1,\cdots,n\} \subseteq \{|x_i - x_j| \mid 1 \le i < j \le 4\} \cup \{|y_i - y_j| \mid 1 \le i < j \le 4\}.$$

三、**（本题满分 50 分）**已知 $a,b,c,d \in [0,\sqrt[4]{2})$，满足 $a^3+b^3+c^3+d^3=2$. 求

$$\frac{a}{\sqrt{2-a^4}}+\frac{b}{\sqrt{2-b^4}}+\frac{c}{\sqrt{2-c^4}}+\frac{d}{\sqrt{2-d^4}}$$

的最小值.

四、**（本题满分 50 分）**设 a 为正整数，数列 $\{a_n\}$ 满足：

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n^2 + 20, n \ge 1.$$

(1) 求证：存在一个非立方数的正整数 a，使得数列 $\{a_n\}$ 中有一项为立方数.
(2) 求证：数列 $\{a_n\}$ 中至多有一项为立方数.