2022 年全国高中数学联合竞赛一试（A 卷）

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 集合 $A=\{n \mid n^3<2022<3^n, n\in\mathbb{Z}\}$ 的所有元素之和为________.

2. 设函数 $f(x)=\dfrac{x^2+x+16}{x}(2\le x\le a)$，其中实数 $a>2$. 若 $f(x)$ 的值域为 $[9,11]$，则 a 的取值范围是________.

3. 一枚不均匀的硬币，若随机抛掷它两次均得到正面的概率是均得到反面的概率的 9 倍，则随机抛掷它两次得到正面、反面各一次的概率为________.

4. 若复数 z 满足：$\dfrac{z-3i}{z+i}$ 为负实数（i 为虚数单位），$\dfrac{z-3}{z+1}$ 为纯虚数，则 z 的值为________.

5. 若四棱锥 $P-ABCD$ 的棱 AB,BC 的长均为 $\sqrt{2}$，其他各条棱长均为 1，则该四棱锥的体积为________.

6. 已知函数 $y=f(x)$ 的图像既关于点 $(1,1)$ 中心对称，又关于直线 $x+y=0$ 轴对称. 若 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)=\log_2(x+1)$，则 $f(\log_2 10)$ 的值为________.

7. 在平面直角坐标系中，椭圆 $\Omega:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，$P$ 为 Ω 上的动点，A,B 为两个定点，其中 B 的坐标为 $(0,3)$. 若 $\triangle PAB$ 的面积的最小值为 1、最大值为 5，则线段 AB 的长为________.

8. 一个单位方格的四条边中，若有两条边染了颜色 i，另两条边分别染了异于 i 色的另两种不同颜色，则称该单位方格是“i 色主导”的. 如图，一个 1×3 方格表的表格线共含 10 条单位长线段，现要对这 10 条线段染色，每条线段染为红、黄、蓝三色之一，使得红色主导、黄色主导、蓝色主导的单位方格各有一个. 这样的染色方式数为________（答案用数值表示）.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

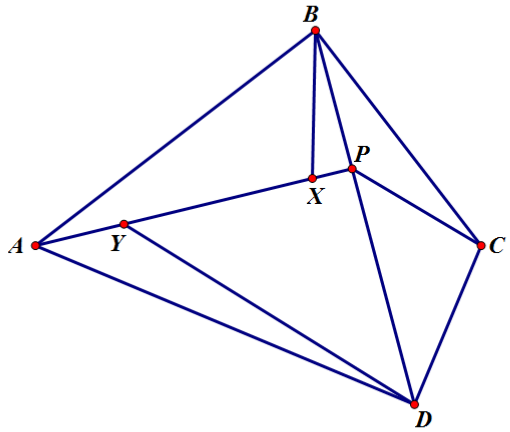
9.（本题满分 16 分） 若 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 满足 $\sin A = \cos B = \tan C$，求 $\cos^3 A + \cos^2 A - \cos A$ 的值．

10.（本题满分 20 分） 给定正整数 $m(m \geq 3)$．设正项等差数列 $\{a_n\}$ 与正项等比数列 $\{b_n\}$ 满足：$\{a_n\}$ 的首项等于 $\{b_n\}$ 的公比，$\{b_n\}$ 的首项等于 $\{a_n\}$ 的公差，且 $a_m = b_m$．求 a_m 的最小值，并确定当 a_m 取到最小值时 a_1 与 b_1 的比值．

11.（本题满分 20 分） 在平面直角坐标系中，双曲线 $\Gamma : \dfrac{x^2}{3} - y^2 = 1$．对平面内不在 Γ 上的任意一点 P，记 Ω_P 为过点 P 且与 Γ 有两个交点的直线的全体．对任意直线 $l \in \Omega_P$，记 M, N 为 l 与 Γ 的两个交点，定义 $f_P(l) = |PM| \cdot |PN|$．若存在一条直线 $l_0 \in \Omega_P$ 满足：l_0 与 Γ 的两个交点位于 y 轴异侧，且对任意直线 $l \in \Omega_P$，$l \neq l_0$，均有 $f_P(l) > f_P(l_0)$，则称 P 为“好点”．求所有好点所构成的区域的面积．

2022 年全国高中数学联合竞赛加试（A 卷）

一、（本题满分 40 分）如图，在凸四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=\angle ADC=90°$，对角线 BD 上一点 P 满足 $\angle APB=2\angle CPD$，线段 AP 上两点 X,Y 满足 $\angle AXB=2\angle ADB, \angle AYD=2\angle ABD$. 求证：$BD=2XY$.



二、（本题满分 40 分）设整数 $n(n>1)$ 恰有 k 个互不相同的质因子，记 n 的所有正约数之和为 $\sigma(n)$. 求证：$\sigma(n) \mid (2n-k)!$.

三、（本题满分 50 分）设 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$ 是非负整数，同时满足以下条件：
(1) 存在正整数 $k\le 100$，使得 $a_1\le a_2\le\cdots\le a_k$，而当 $i>k$ 时 $a_i=0$；
(2) $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=100$；
(3) $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+100a_{100}=2022$.
求 $a_1+2^2a_2+3^2a_3+\cdots+100^2a_{100}$ 的最小可能值.

四、（本题满分 50 分）求具有下述性质的最小正整数 t：将 100×100 的方格纸的每个小方格染为某一种颜色，若每一种颜色的小方格数目均不超过 104，则存在一个 $1\times t$ 或 $t\times 1$ 的矩形，其中 t 个小方格含有至少三种不同颜色.