2024年广州市中学生数学竞赛

一、一试填空题（每题 7 分，共 70 分）

1. 在复数范围内方程$x^2-4x+5=0$的两根为α,β，求$|\alpha|+|\beta|$的值。

2. 求方程$\lg(\sqrt{3}\sin x)=\lg(-\cos x)$的解集。

3. 正整数集合A_k的最小元素为1，最大元素为2007，并且各元素可以从小到大排成一个公差为k的等差数列，求集合$A_{17}\cup A_{59}$中的元素个数。

4. 已知正三棱锥$P-ABC$底面边长为 1，高为$\sqrt{2}$，求其内切球半径。

5. 已知函数$f(x)=\log_a\left(\dfrac{1}{2}ax^2-x+\dfrac{1}{x}\right)$在区间$[2,3]$上恒正，求实数$a$的取值范围。

6. 设S是不等式$|x-\dfrac{1}{2}|\le 3$的解集，整数$m,n\in S$。若$\vec{p}=(m,n)$，$\vec{q}=(-1,2)$，（1）求$\vec{p}\perp\vec{q}$的概率；（2）设$\xi=m^2$，求其数学期望$E(\xi)$的值。

7. 实数x,y满足$3x^2+2y^2\le 6$，求$2x+3y$的最大值。

8. 实数x,y满足$x|x|+\dfrac{y|y|}{3}=1$，求$|\sqrt{3}x+y-4|$的取值范围。

9. 将大小相同5个不同颜色的小球，放在A,B,C,D,E共5个盒子中，每个球可以任意放在一个盒子里，则恰有两个盒子空且A盒子最多放1个球的放球方法总数为。

10. 若$2^6+2^9+2^n$为一个平方数，求正整数n的值。

二、一试解答题（共 50 分）

11. （本题 16 分）已知曲线$C_n: x^2-2nx+y^2=0\ (n=1,2,\cdots)$。从点$P(-1,0)$向曲线$C_n$引斜率为$k_n\ (k_n>0)$的切线$l_n$，切点为$P_n(x_n,y_n)$。

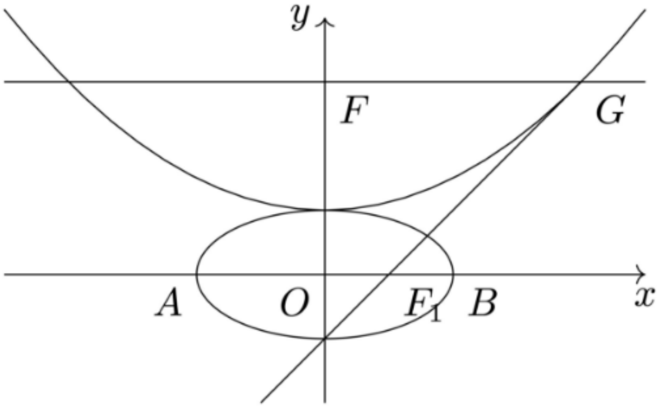
（1）求数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$的通项公式；

（2）证明：$x_1\cdot x_3\cdot x_5\cdot\cdots\cdot x_{2n-1}<\sqrt{\dfrac{1-x_n}{1+x_n}}<\sqrt{2}\sin\dfrac{x_n}{y_n}$。

12. （本题 17 分）设$b>0$，椭圆方程为$\dfrac{x^2}{2b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，抛物线方程为$x^2=8(y-b)$。如图所示，过点$F(0,b+2)$作$x$轴的平行线，与抛物线在第一象限的交点为$G$，已知抛物线在点$G$的切线经过椭圆的右焦点$F_1$。

（1）求满足条件的椭圆方程和抛物线方程；

（2）设 A,B 分别是椭圆长轴的左、右焦点，试探完在抛物线上是否存在点 P，使得 $\triangle ABP$ 为直角三角形？若存在，请指出共有几个这样的点？并说明理由（不必具体求出这些点的坐标）。



13.（本题 17 分）设 $f(x)=ax^2+\cos x-1$，$a\in\mathbb{R}$。

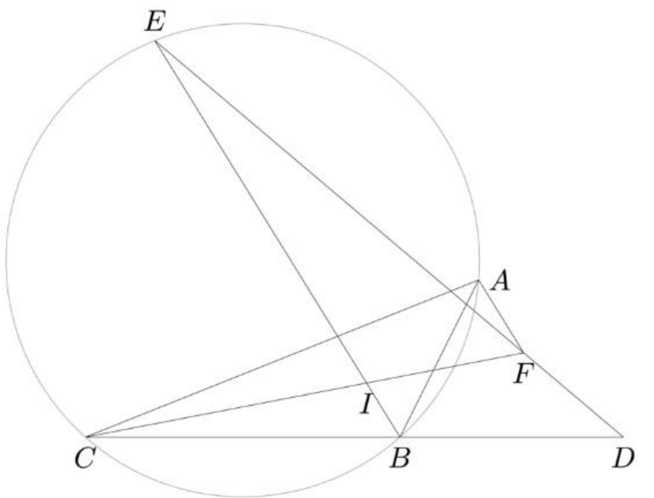
（1）当 $a=\dfrac{1}{\pi}$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值；

（2）当 $a\ge\dfrac{1}{2}$ 时，求证：$f(x)\ge 0$；

（3）求证：$\cos\dfrac{1}{2}+\cos\dfrac{1}{3}+\cdots+\cos\dfrac{1}{n}>n-\dfrac{4}{3}\ (n\in\mathbb{N}^*,n>1)$。

三、二试试题

14.（本题满分 40 分）如图，I 是 $\triangle ABC$ 的内心，$\angle A$ 的外角平分线交 BC 于点 D，直线 BI 交 $\triangle ABC$ 外接圆于点 E，直线 CI 与直线 DE 交点为 F。证明：$AF/\!/BE$。



15.（本题满分 40 分）已知实数 a,b,c 均不等于 0，且 $a+b+c=m$，

$a^2+b^2+c^2=\dfrac{m^2}{2}$，求 $\dfrac{a(m-2a)^2+b(m-2b)^2+c(m-2c)^2}{abc}$ 的值。